

Scomposizione canonica di Kalman

Si consideri il sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$. Sia \mathcal{X}^+ il *sottospazio raggiungibile* ed \mathcal{E}^- il *sottospazio non osservabile*.

- Sia \mathcal{B}_2 una matrice di base del sottospazio $\mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$;
- Siano \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_4 due insiemi di vettori linearmente indipendenti tali che:
 - $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sia una base per lo spazio \mathcal{X}^+ .
 - $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_4$ sia una base per lo spazio \mathcal{E}^- .
- Sia \mathcal{B}_3 un insieme di vettori linearmente indipendenti in modo tale che le colonne della seguente matrice \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4]$$

costituiscono una base per lo spazio degli stati \mathbf{X} .

Il sistema trasformato che si ottiene utilizzando \mathbf{T} come matrice di trasformazione, $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$, è caratterizzato dalle seguenti matrici:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{1,1} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{1,3} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{2,1} & \bar{\mathbf{A}}_{2,2} & \bar{\mathbf{A}}_{2,3} & \bar{\mathbf{A}}_{2,4} \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{4,3} & \bar{\mathbf{A}}_{4,4} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0]$$

Tale struttura si ottiene considerando che:

- il sottospazio $\mathcal{X}^+ = \text{span}\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ è \mathbf{A} -invariante.
- il sottospazio $\mathcal{E}^- = \text{span}\{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4\}$ è \mathbf{A} -invariante.
- $\text{Im}\bar{\mathbf{B}} \subseteq \mathcal{X}^+$
- $\text{ker}\bar{\mathbf{C}} \supseteq \mathcal{E}^-$

Struttura della scomposizione canonica

- La scomposizione canonica consente di evidenziare i sottosistemi:

$$\mathcal{S}_1 = (\bar{\mathbf{A}}_{1,1}, \bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{C}}_1) \quad : \text{raggiungibile e osservabile}$$

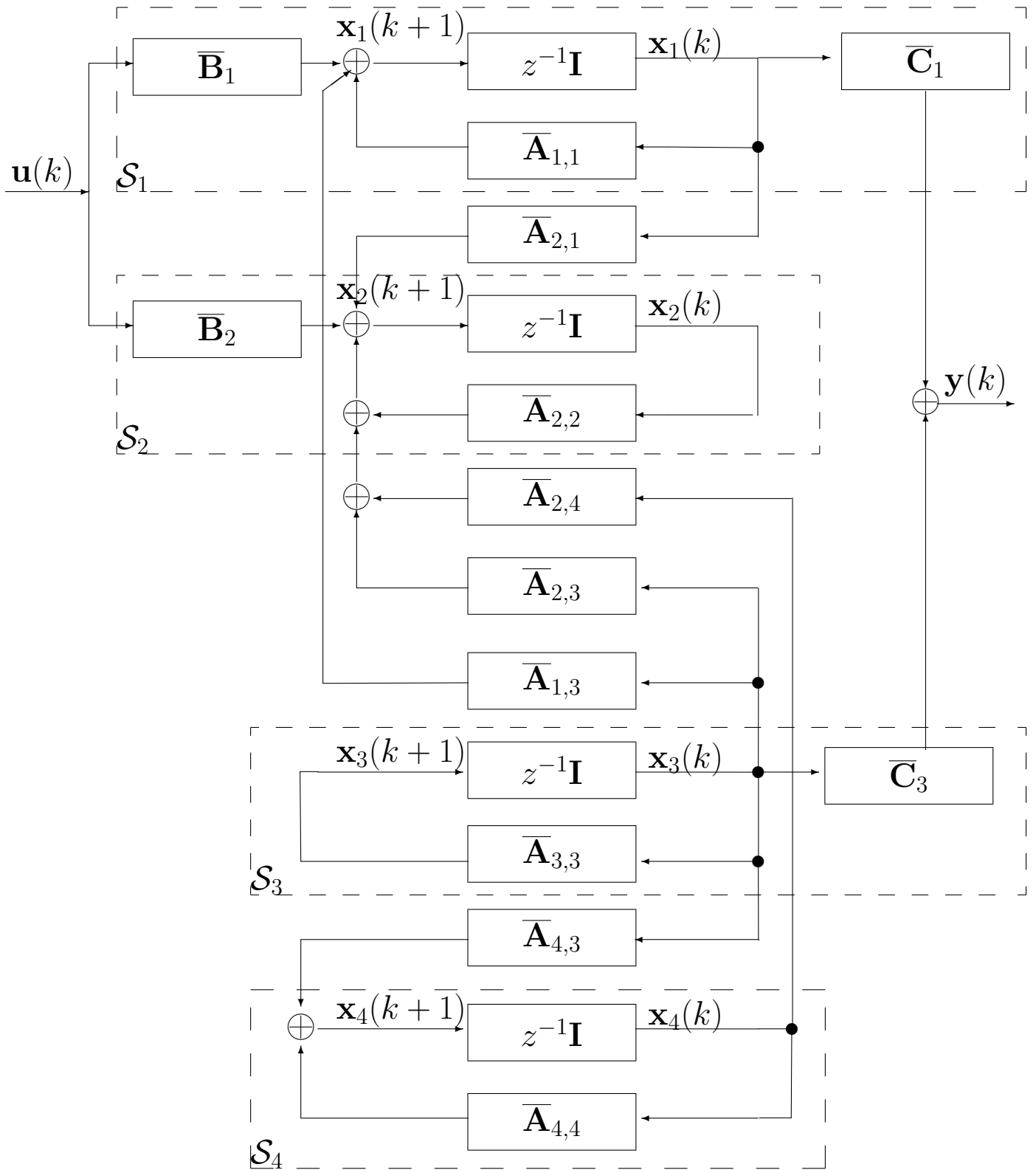
$$\mathcal{S}_2 = (\bar{\mathbf{A}}_{2,2}, \bar{\mathbf{B}}_2, 0) \quad : \text{raggiungibile e non osservabile}$$

$$\mathcal{S}_3 = (\bar{\mathbf{A}}_{3,3}, 0, \bar{\mathbf{C}}_3) \quad : \text{non raggiungibile e osservabile}$$

$$\mathcal{S}_4 = (\bar{\mathbf{A}}_{4,4}, 0, 0) \quad : \text{non raggiungibile e non osservabile}$$

- La matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ è funzione della sola parte *completamente raggiungibile e completamente osservabile* del sistema dato, cioè dipende solo dalle matrici del sottosistema \mathcal{S}_1 della scomposizione canonica di Kalman. Infatti, si ha che:

$$\mathbf{H}(z) = \bar{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{C}}_1(z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{1,1})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_1$$



Esempio. Dato il seguente sistema lineare discreto:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

si operi la scomposizione canonica di Kalman mettendo in evidenza le dimensioni e gli autovalori dei 4 sottosistemi \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 , \mathcal{S}_3 e \mathcal{S}_4 .

(Sol.) Per operare la scomposizione canonica di Kalman, occorre calcolare il sottospazio raggiungibile

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im}\mathcal{R}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

e il sottospazio non osservabile

$$\mathcal{E}^- = \ker\mathcal{O}^- = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Occorre quindi calcolare il sottospazio intersezione $\mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Tale sottospazio è nullo in quanto il vettore che genera \mathcal{E}^- non è combinazione lineare dei vettori di base del sottospazio \mathcal{X}^+ , infatti la seguente matrice ha rango pieno

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \quad \rightarrow \quad \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{E}^- = \{0\}$$

Le matrici di base della scomposizione di Kalman sono quindi le seguenti

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = 0, \quad \mathcal{B}_3 = 0, \quad \mathcal{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ che porta il sistema nella forma canonica di Kalman è basata sulla matrice

$$\mathbf{T} = [\mathcal{B}_1 \quad \mathcal{B}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

Il sistema dato è composto da una parte raggiungibile e osservabile \mathcal{S}_1 di dimensione 2 e da una parte non raggiungibile e non osservabile \mathcal{S}_4 di dimensione 1.

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \mathcal{S}_4 = \{-1, 0, 0\}$$

Gli autovalori della parte \mathcal{S}_1 sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. L'autovalore della parte \mathcal{S}_4 è $\lambda = -1$.

Scomposizione canonica di Kalman:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{13} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0]$$

Sottosistema raggiungibile:

$$\bar{\mathbf{A}}_R = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}_R = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_R = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0]$$

Sottosistema osservabile:

$$\bar{\mathbf{A}}_O = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{13} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{33} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}_O = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_O = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_3]$$

Sottosistema non raggiungibile:

$$\bar{\mathbf{A}}_{NR} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}_{NR} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{NR} = [\bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0]$$

Sottosistema non osservabile:

$$\bar{\mathbf{A}}_{NO} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}_{NO} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{NO} = [0 \quad 0]$$