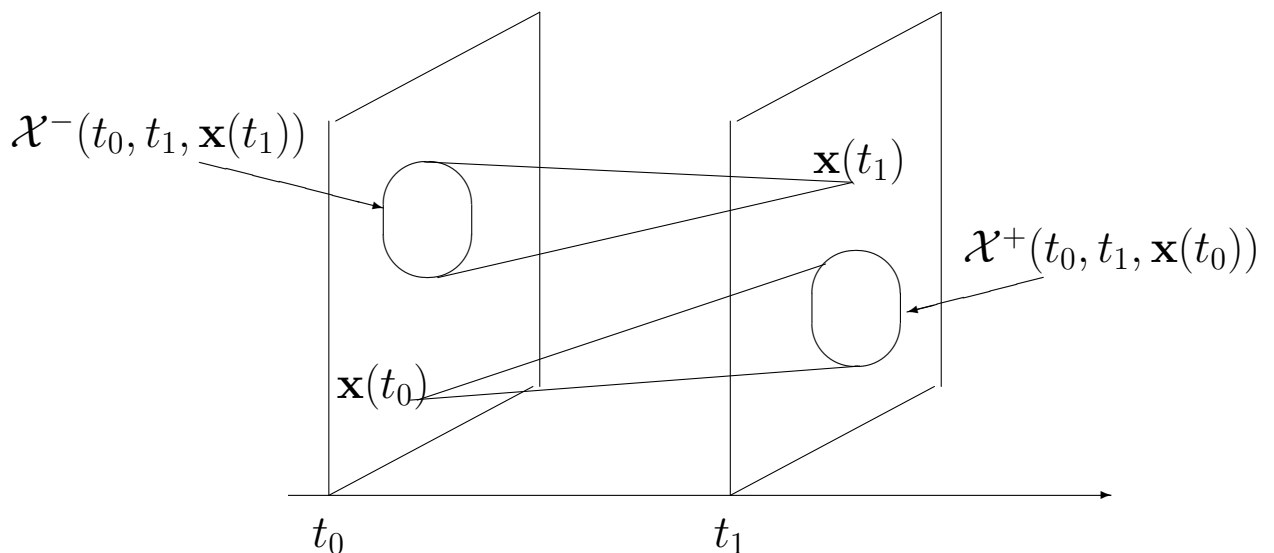


Raggiungibilità e controllabilità

- **Raggiungibilità.** Il problema della raggiungibilità consiste nel determinare l'insieme di *stati raggiungibili a partire da un dato stato iniziale*:
 - Uno stato $\mathbf{x}(t_1)$ di un sistema dinamico è raggiungibile dallo stato $\mathbf{x}(t_0)$ nell'intervallo temporale $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $\mathbf{x}(t_1) = \psi(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(\cdot))$.
 - Indicheremo con $\mathcal{X}^+(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0))$ l'insieme degli stati raggiungibili dall'evento $\{t_0, \mathbf{x}(t_0)\}$ all'istante t_1 .
- **Controllabilità.** Il problema della controllabilità consiste nel determinare l'insieme di stati controllabili ad un determinato *stato finale*:
 - Uno stato $\mathbf{x}(t_0)$ di un sistema dinamico è controllabile allo stato $\mathbf{x}(t_1)$ nell'intervallo temporale $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $\mathbf{x}(t_1) = \psi(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(\cdot))$.
 - Indicheremo con $\mathcal{X}^-(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_1))$ l'insieme degli stati controllabili all'evento $\{t_1, \mathbf{x}(t_1)\}$ dall'istante t_0 .



- Per sistemi tempo-invarianti si pone $t_0 = 0$ e $t_1 = t$:

$$\mathcal{X}^+(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0)) \Rightarrow \mathcal{X}^+(t, \mathbf{x}(0)), \quad \mathcal{X}^-(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_1)) \Rightarrow \mathcal{X}^-(t, \mathbf{x}(t))$$
- Per sistemi tempo-discreti si pone $t \rightarrow k$:

$$\mathcal{X}^+(t, \mathbf{x}(0)) \Rightarrow \mathcal{X}^+(k, \mathbf{x}(0)), \quad \mathcal{X}^-(t, \mathbf{x}(t)) \Rightarrow \mathcal{X}^-(k, \mathbf{x}(k))$$

Sistemi lineari, discreti e tempo-invarianti

Consideriamo il seguente sistema lineare, discreto e tempo-invariante:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

Raggiungibilità

- L'insieme $\mathcal{X}^+(k)$ degli stati raggiungibili dall'origine in k passi coincide con l'insieme degli stati $\mathbf{x}(k)$ che si ottengono partendo dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = 0$ e considerando la sola evoluzione forzata del sistema:

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)} \mathbf{B} \mathbf{u}(j) = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

e facendo variare gli ingressi $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(k-1)$ in tutti i modi possibili.

- Definizione. Matrice di raggiungibilità in k passi:

$$\mathcal{R}^+(k) \triangleq [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]$$

- L'insieme $\mathcal{X}^+(k)$ degli stati raggiungibili dall'origine in k passi è uno spazio vettoriale che coincide con l'immagine della matrice $\mathcal{R}^+(k)$:

$$\mathcal{X}^+(k) = \text{Im}[\mathcal{R}^+(k)]$$

- I sottospazi $\mathcal{X}^+(k)$ raggiungibili in $1, 2, \dots, k$ passi soddisfano la seguente catena di inclusioni (n è la dimensione dello spazio degli stati):

$$\mathcal{X}^+(1) \subseteq \mathcal{X}^+(2) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}^+(n) = \mathcal{X}^+(n+1) = \dots$$

- Il massimo sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+(n)$ si ottiene, al più, in n passi.

- Definizione. Matrice di raggiungibilità del sistema:

$$\mathcal{R}^+ \triangleq \mathcal{R}^+(n) = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

- Il sottospazio \mathcal{X}^+ degli stati raggiungibili dall'origine in un'intervallo di tempo *comunque lungo* coincide con l'immagine della matrice \mathcal{R}^+ :

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im}[\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \text{Im}\mathcal{R}^+$$

- Definizione. Un sistema è raggiungibile se il sottospazio \mathcal{X}^+ degli stati raggiungibili dall'origine coincide con l'intero spazio degli stati \mathbf{X} :

$$\mathcal{X}^+ = \mathbf{X}$$

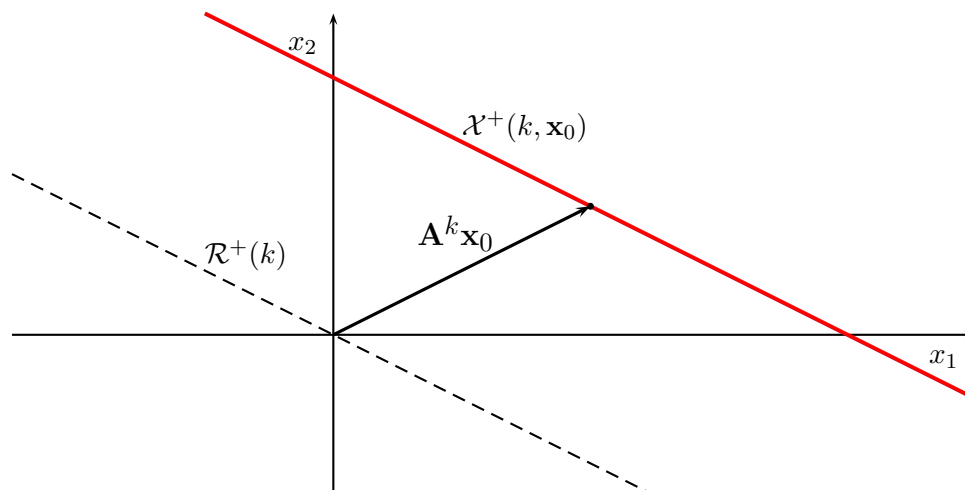
- Condizione *necessaria e sufficiente* affinché un sistema sia raggiungibile è:

$$\text{rango}(\mathcal{R}^+) = n$$

- Per sistemi discreti, lineari e tempo-invarianti l'insieme $\mathcal{X}^+(k, \mathbf{x}_0)$ ha la struttura di una varietà lineare:

$$\mathcal{X}^+(k, \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 + \mathcal{R}^+(k)$$

- Rappresentazione grafica:



Controllabilità

- Uno stato $\mathbf{x}(0)$ è controllabile a zero in k passi se esiste una successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(k-1)$ che porta il sistema dallo stato $\mathbf{x}(0)$ allo stato $\mathbf{x}(k) = 0$ nell'intervallo di tempo $[0, k]$:

$$0 = \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)} \mathbf{B} \mathbf{u}(j)$$

ovvero se:

$$-\mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)} \mathbf{B} \mathbf{u}(j) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(k) = \text{Im} \mathcal{R}^+}$$

cioè se lo stato “ $-\mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)$ ” è raggiungibile dall'origine in k passi.

- Proprietà. Un sistema è controllabile se e solo se vale la seguente relazione:

$$\boxed{\text{Im} \mathbf{A}^n \subseteq \mathcal{X}^+(n) = \text{Im} \mathcal{R}^+}$$

dove \mathcal{R}^+ rappresenta la matrice di raggiungibilità del sistema.

- In generale, per i sistemi discreti le proprietà di raggiungibilità e controllabilità non sono equivalenti:

- 1) La raggiungibilità implica la controllabilità.

$$\boxed{\text{raggiungibilità} \Rightarrow \text{controllabilità}}$$

Infatti l'ipotesi di raggiungibilità implica $\mathcal{X}^+ = \mathbf{X}$ dalla quale segue che: $\text{Im} \mathbf{A}^n \subseteq \mathcal{X}^+ = \mathbf{X}$, cioè il sistema è sicuramente controllabile.

- 2) La controllabilità non implica la raggiungibilità:

$$\boxed{\text{controllabilità} \not\Rightarrow \text{raggiungibilità}}$$

Infatti, se per esempio $\mathbf{A} = 0$ e $\text{rango}(\mathbf{B}) < n$, allora:

$$\text{rango}([\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]) = \text{rango}([\mathbf{B} \ 0 \ \dots \ 0]) < n$$

cioè il sistema non è raggiungibile pur essendo controllabile.

- Se la matrice \mathbf{A} è a rango pieno, la raggiungibilità e la controllabilità si implicano a vicenda.

Sistemi lineari, invarianti, tempo-continui

Consideriamo il seguente sistema lineare, invariante e tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Raggiungibilità:

- Uno stato $\mathbf{x}(t)$ è raggiungibile all'istante t a partire dallo stato zero se esiste un ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ tale che:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

- Sia $\mathcal{X}^+(t)$ l'insieme degli stati raggiungibili dallo stato $\mathbf{x}(0) = 0$ nell'intervallo di tempo $[0, t]$ e sia \mathcal{X}^+ l'insieme degli stati raggiungibili dallo stato $\mathbf{x}(0) = 0$ nell'intervallo di tempo $[0, \infty]$.
- Indichiamo con R_t l'operatore lineare $R_t : \mathcal{U} \rightarrow X$ così definito:

$$R_t : \mathbf{u}(\cdot) \rightarrow \mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

- L'insieme \mathcal{U} è infinito dimensionale. Gli stati $\mathbf{x}(t)$ raggiungibili al tempo t sono tutti e soli quelli che appartengono all'*immagine* di R_t :

$$\mathcal{X}^+(t) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \text{Im}R_t\}$$

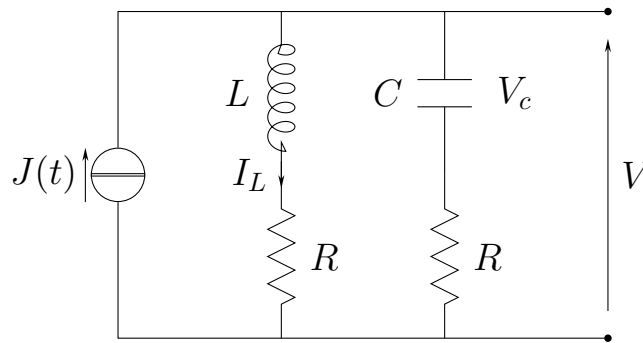
- L'insieme $\mathcal{X}^+(t)$, essendo l'immagine di un operatore lineare, è *un sottospazio vettoriale* dello spazio degli stati X .
- Proprietà. Per qualsiasi $t > 0$, il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+(t)$ è l'immagine della matrice di raggiungibilità \mathcal{R}^+ :

$$\mathcal{X}^+(t) = \mathcal{X}^+ = \text{Im}\mathcal{R}^+$$

- A differenza di quanto accade per i sistemi discreti, il sottospazio raggiungibile non dipende dalla lunghezza dell'intervallo $[0, t]$
- Ovviamente, al diminuire della lunghezza dell'intervallo $[0, t]$, l'ampiezza dell'azione di controllo $\mathbf{u}(t)$ diventa via via sempre più grande.

Controllabilità. Per sistemi lineari, invarianti tempo continui, il sottospazio controllabile \mathcal{X}^- non dipende dall'intervallo in cui agisce il controllo e coincide con il sottospazio raggiungibile \mathcal{X}^+ .

Esempio. Si consideri la seguente rete elettrica:



Le equazioni dinamiche del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} L \frac{dI_L}{dt} = V_C + R(J - I_L) - R I_L \\ C \frac{dV_C}{dt} = J - I_L \\ V = V_C + R(J - I_L) \end{cases}$$

dove I_L è la corrente che scorre nell'induttanza, V_C la tensione ai capi del condensatore, J la corrente in ingresso e V la tensione di uscita. In forma matriciale, la dinamica del sistema è:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{-2R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} J \\ V = \begin{bmatrix} -R & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} J \end{cases} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & \frac{1}{LC} - \frac{2R^2}{L^2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{LC} \end{bmatrix}, \quad \det \mathcal{R}^+ = \frac{1}{LC} \left[\frac{R^2}{L} - \frac{1}{C} \right]$$

Il sistema è raggiungibile solo se \mathcal{R}^+ ha rango pieno. Il sistema non è completamente raggiungibile se

$$R^2 = \frac{L}{C} \quad \Leftrightarrow \quad RC = \frac{L}{R}$$

cioè se la costante di tempo dell'induttanza è uguale a quella della capacità, cioè quando i due autovalori del sistema coincidono: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Sistemi equivalenti

- *Proprietà.* Sistemi (discreti o continui) *algebricamente equivalenti* hanno le stesse proprietà di raggiungibilità.
- Sia \mathbf{T} la matrice di trasformazione (non-singolare) che rende algebricamente equivalenti i due sistemi lineari invarianti $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ed $\bar{\mathcal{S}} = (\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}})$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, & \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, & \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \end{cases}$$

I sottospazi raggiungibili in k passi dei due sistemi \mathcal{S} ed $\bar{\mathcal{S}}$ sono legati tra loro dalla seguente relazione:

$$\bar{\mathcal{X}}^+(k) = \text{Im}[\bar{\mathbf{B}} \dots \bar{\mathbf{A}}^{k-1}\bar{\mathbf{B}}] = \text{Im}(\mathbf{T}^{-1}[\mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]) = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{X}^+(k)$$

- Il sottospazio \mathcal{X}^+ è invariante rispetto ai cambiamenti di base nello spazio degli stati:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathcal{X}^+ = \mathbf{T}\bar{\mathcal{X}}^+}$$

- Siano \mathcal{R}^+ e $\bar{\mathcal{R}}^+$ le *matrici di raggiungibilità* dei due sistemi. Per $k = n$ vale la relazione:

$$\boxed{\bar{\mathcal{R}}^+ = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}^+} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathcal{R}^+ = \mathbf{T}\bar{\mathcal{R}}^+}$$

- Se i sistemi hanno un solo ingresso, \mathcal{R}^+ e $\bar{\mathcal{R}}^+$ sono quadrate e non singolari, per cui vale la semplice relazione:

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\bar{\mathcal{R}}^+)^{-1}}$$

Esempio. Calcolare la matrice di raggiungibilità \mathcal{R}^+ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{cases}$$

Matrice di raggiungibilità \mathcal{R}^+ e calcolo del sottospazio \mathcal{X}^+ :

$$\mathcal{R}^+ = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}^+ = \text{Im}\mathcal{R}^+ = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è completamente raggiungibile.

Esempio. Calcolare la matrice di raggiungibilità \mathcal{R}^+ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{cases}$$

Matrice di raggiungibilità \mathcal{R}^+ e calcolo del sottospazio \mathcal{X}^+ :

$$\mathcal{R}^+ = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}^+ = \text{Im}[\mathcal{R}^+] = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema NON è completamente raggiungibile.

Esempio. Calcolare la matrice di raggiungibilità \mathcal{R}^+ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \end{cases}$$

Matrice di raggiungibilità \mathcal{R}^+ e calcolo del sottospazio \mathcal{X}^+ :

$$\mathcal{R}^+ = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 & 0 & | & 1 & -1 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}^+ = \text{Im}[\mathcal{R}^+] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema NON è completamente raggiungibile.