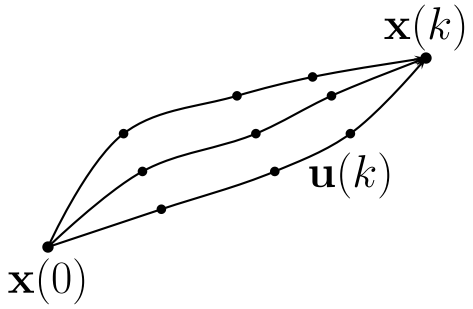
# Controllo di sistemi discreti

*Problema di controllo: Dati* $\mathbf{x}(0)$ *e* $\mathbf{x}(k)$*, determinare la successione di ingresso* $\mathbf{u}(0), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$ *che consenta di far passare il sistema dallo stato iniziale* $\mathbf{x}(0)$ *allo stato finale* $\mathbf{x}(k)$ *nell'intervallo di tempo* $[0,\ k]$.




Per risolvere il problema occorre risolvere la seguente equazione:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

nell'incognita $\mathbf{u}(j)$ per $j \in [0,\ k-1]$.

*Proprietà*. Il problema di controllo ha soluzione se e solo se:

$$\boxed{\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(k)}$$

cioè se il vettore $\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$ è raggiungibile dallo stato zero in $k$ passi.

Se il problema ammette soluzione, questa si determina risolvendo il seguente sistema lineare non omogeneo di $n$ equazioni nelle $k \times m$ incognite:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) = [\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} = \mathcal{R}^+(k)\mathbf{u}$$

dove con $\mathbf{u}$ si è indicato il seguente vettore incognito:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ \vdots \\ u_m(k-1) \\ \vdots \\ u_1(0) \\ \vdots \\ u_m(0) \end{bmatrix}$$

In generale, la soluzione $\mathbf{u}$ del problema <u>non è unica</u>. Tutte le possibili soluzioni $\mathbf{u}$ si ottengono sommando ad una soluzione particolare $\overline{\mathbf{u}}$ il kernel $\overline{\mathbf{v}}$ della matrice $\mathcal{R}^+(k)$:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}, \qquad \bar{\mathbf{v}}: \quad \mathcal{R}^+(k)\bar{\mathbf{v}} = 0$$

Per brevità di notazione, nel seguito si indicherà $\mathcal{R}_k^+ = \mathcal{R}^+(k)$.

*<u>Nota</u>*. È possibile dimostrare che tra tutte le possibili soluzioni $\mathbf{u}$, quella che minimizza la norma euclidea

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{u}^T(i)\,\mathbf{u}(i)}$$

ha la forma seguente:

$$\boxed{\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T[\mathcal{R}_k^+(\mathcal{R}_k^+)^T]^{-1}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)]}$$

Questa soluzione *richiede una conoscenza perfetta del sistema da controllare* (matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$) e una assenza completa di disturbi.

---

<u>Dimostrazione</u>. La soluzione $\mathbf{u}$ sopra riportata si determina ponendo

$$\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T\eta$$

nell'equazione

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) = \mathcal{R}_k^+\mathbf{u}$$

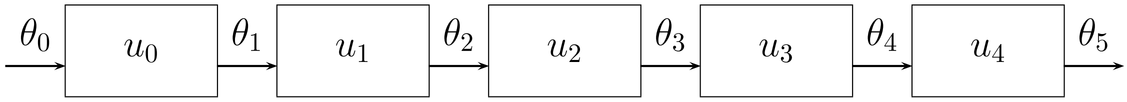
e risolvendo rispetto ad $\eta$ la seguente equazione:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) = \mathcal{R}_k^+(\mathcal{R}_k^+)^T\eta$$

Se $rango(\mathcal{R}_k^+) = n$, si ricava

$$\eta = [\mathcal{R}_k^+(\mathcal{R}_k^+)^T]^{-1}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)]$$

**Esempio.** Si consideri il problema di riscaldare delle barrette di acciaio che passano attraverso un forno segmentato in 5 zone. Si supponga che il costo del riscaldamento in ciascuna zona sia proporzionale al quadrato della temperatura della zona stessa.




Si consideri la zona $i$-esima del forno, $i = 0, 1, \ldots, 4$, e sia:

| | |
|---|---|
| $\theta_i$ | la temperatura della barra all'ingresso |
| $\theta_{i+1}$ | la temperatura della barra all'uscita |
| $u_i$ | la temperatura del forno nella zona i-esima |

Si assuma come modello del sistema l'equazione (per $i = 0, 1, \ldots, 4$):

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{u_i - \theta_i}{2} \qquad \leftrightarrow \qquad \theta_{i+1} = \frac{1}{2}\theta_i + \frac{1}{2}u_i$$

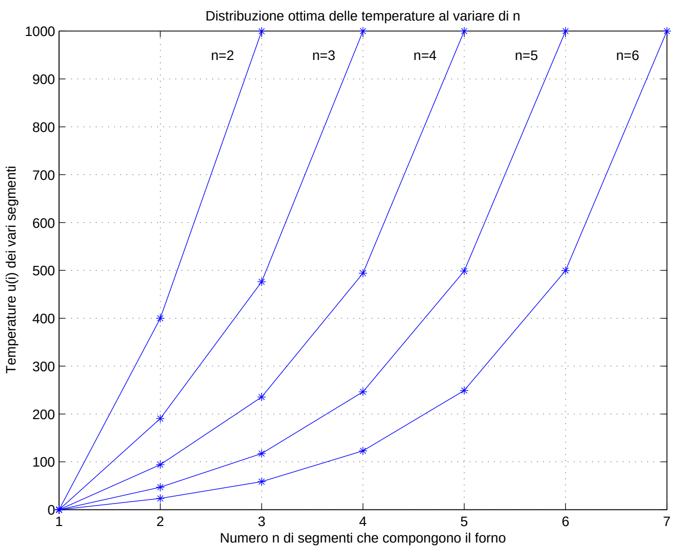
Sia $\mathcal{R}_5$ la matrice di raggiungibilità del sistema in 5 passi ($\mathbf{A} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{B} = \frac{1}{2}$):

$$\mathcal{R}_5 = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \end{array}\right]$$

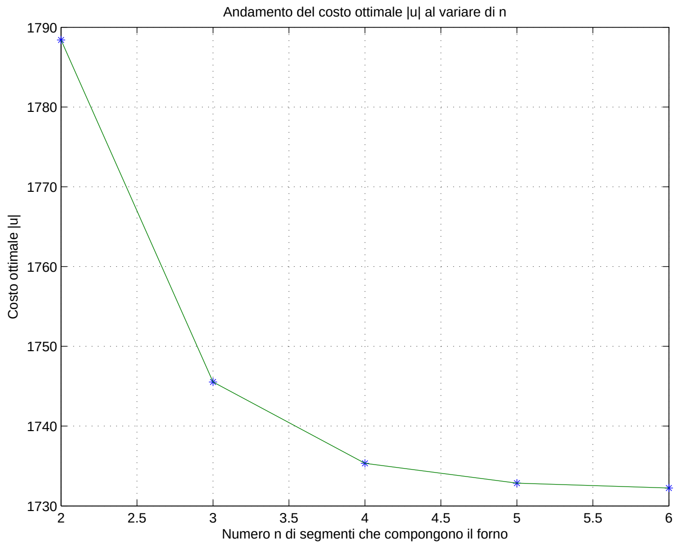
La successione $u_0$, $u_1$, ..., $u_4$ di temperature del forno che consente di riscaldare le barrette dalla temperatura ambiente $\theta_0 = 0 \;\; C^o$ alla temperatura $\theta_5 = 1000 \; C^o$ minimizzando il costo del riscaldamento $\sum_i u_i^2$ è la seguente

$$\bar{u} = \mathcal{R}_5^T(\mathcal{R}_5\mathcal{R}_5^T)^{-1}1000 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{bmatrix} \left(\frac{1-(1/32)^2}{3}\right)^{-1} 1000 = \begin{bmatrix} 1502 \\ 751 \\ 375 \\ 188 \\ 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Distribuzione ottima delle temperature al variare del numero di segmenti $n$:



Andamento del costo ottimale $|u|$ al variare del numero di segmenti $n$:




```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% File: opt_k_forno.m
% Calcolo della temperatura ottima dei segmenti di un forno
% che minimizza il costo quadratico. Calcolo al variare di n
x0=0; xf=1000;              % Stato iniziale e Stato finale
a=1/2; b=1/2;               % Coefficienti dell'equazione alle differenze
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(1); clf; n_max=6;
costo=zeros(1,n_max);
for n=(2:n_max);            % Al variare del numero di segmenti
    Rn=[b zeros(1,n-1)];
    for ii=(2:n)
        Rn(ii)=a*Rn(ii-1);  % Matrice di raggiungibilita'
    end
    u=flipud(Rn'*inv(Rn*Rn')*(xf-a^n)); % Sequenza ottima degli ingressi
    xn=[x0 zeros(1,n)];
    for ii=(1:n)
        xn(ii+1)=a*xn(ii)+b*u(ii);      % Evoluzione dello stato
    end
    plot(xn,'*'); hold on               % Graficazione
    plot(xn,'-')
    text(n+1/2,0.95*xn(n+1),['n=' num2str(n)])
    costo(n)=norm(u);
end
title('Distribuzione ottima delle temperature al variare di n')
ylabel('Temperature u(i) dei vari segmenti')
xlabel('Numero n di segmenti che compongono il forno'); grid on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(2); clf
plot((2:n), costo(2:n),'*',(2:n), costo(2:n),'-'); % Graficazione costo
title('Andamento del costo ottimale |u| al variare di n')
ylabel('Costo ottimale |u|')
xlabel('Numero n di segmenti che compongono il forno'); grid on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```