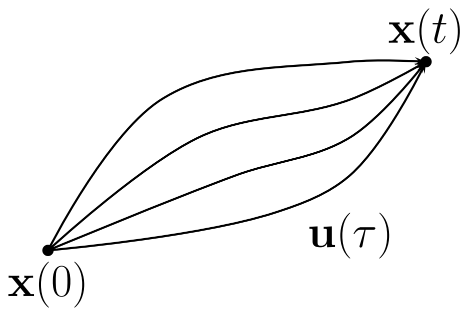
Controllo di sistemi continui

- *<u>Problema di controllo</u>: Dati $\mathbf{x}(0)$ e $\mathbf{x}(t)$, determinare la funzione di ingresso $\mathbf{u}(\tau)$, con $\tau \in [0,\ t]$, che consenta di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(t)$ nell'intervallo di tempo $[0,\ t]$.*



- Per risolvere il problema occorre risolvere la seguente equazione:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\, d\tau$$

nell'incognita $\mathbf{u}(\tau)$ per $\tau \in [0,\ t]$. Tipicamente esistono infinite soluzioni diverse.

- Il problema di controllo ha soluzione se e solo se:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+}$$

cioè se il vettore $\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$ è raggiungibile.

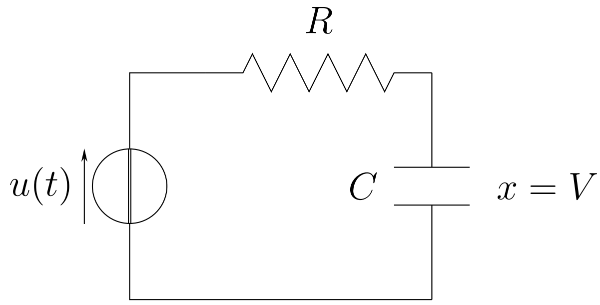
- La soluzione particolare $\bar{\mathbf{u}}(\tau)$ che minimizza la norma quadratica $||\mathbf{u}(\tau)|| = \sqrt{\int_0^t \mathbf{u}(\tau)^T\mathbf{u}(\tau)\, d\tau}$ è la seguente:

$$\boxed{\bar{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)}(W_t)^{-1}[\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)]}$$

dove con W_t si è indicato il *<u>gramiano di raggiungibilità</u>*:

$$\boxed{W_t = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)} d\tau}$$

Esempio. Si consideri il seguente circuito elettrico:



Si calcoli la funzione di ingresso $u(\tau)$ di norma minima che porti la tensione V del condensatore dal valore nullo $V(0) = 0$ al valore $V(t_f) = 6$ V nell'intervallo di tempo $[0\ t_f]$ essendo $t_f = 1$. L'equazione dinamica del sistema è:

$$C\frac{dV}{dt} = \frac{u - V}{R} \qquad \rightarrow \qquad \dot{V} = -\frac{V}{RC} + \frac{u}{RC}$$

Posto $x = V$, $a = \frac{1}{RC}$ e $b = \frac{1}{RC}$, l'equazione diventa:

$$\dot{x} = -a\,x + b\,u$$

In questo caso, essendo $\mathbf{A} = a$ e $\mathbf{B} = b$, il gramiano di raggiungibilità è il seguente:

$$W_{t_f} \;=\; \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B}\,\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_f-\tau)}d\tau = \int_0^{t_f} b^2 e^{2\,a(t_f-\tau)}d\tau = \frac{b^2(e^{2\,a\,t_f}-1)}{2a}$$

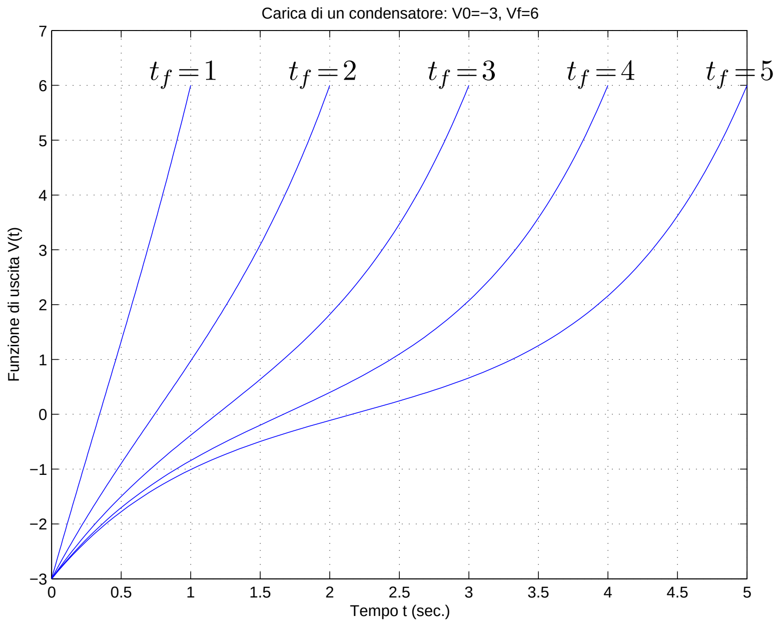
La funzione di ingresso $u(\tau)$ a norma minima è la seguente:

$$u(\tau) \;=\; \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_f-\tau)}(W_{t_f})^{-1}[x(t_f) - e^{\mathbf{A}}x(0)] = \frac{2\,a\,e^{-a(t_f-\tau)}}{b(e^{2\,a\,t_f}-1)}[x(t_f) - e^{a\,t_f}x(0)]$$

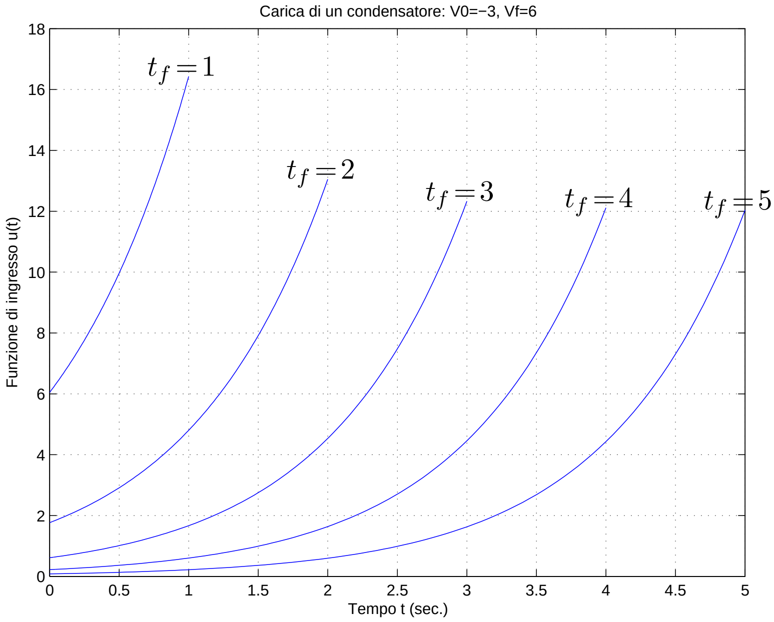
Nel caso in cui $C = 1$ F, $R = 1\,\Omega$, $t_f = 1$, $x(0) = 0$, $x(t_f) = 6$ si ha $a = -1$, $b = 1$ e

$$u(\tau) = \frac{12\,e^{\tau}}{e - e^{-1}}$$

Andamento della tensione di uscita $V(t)$:



Andamento della tensione in ingresso $u(t)$:



Per i dettagli si faccia riferimento i file Matlab "opt_t_rc.m" e "schema_base_s.mdl".

```
%
% Calcolo della funzione ottima di ingresso per il caricamanto
% di un condensatore
%
x0=-3;                       % Stato iniziale
xf=6;                        % Stato finale
a=-1;                        % Coefficienti dell'equazione alle differenze
b=1;
%
figure(1); clf
figure(2); clf
for tf=[1:5];                                % Al variare dell'istante finale
  Wt=(b^2)*(exp(2*a*tf)-1)/(2*a);            % Gramiano di raggiungibilit
  tau=[0:0.01:1]*tf;
  u=b*exp(a*(tf-tau))*inv(Wt)*(xf-exp(a*tf)*x0);    % Sequenza ottima degli ingressi
  MA=a; MB=b; MC=1; T=tau'; U=u';
  OPTIONS = SIMSET('InitialState',x0);
  [t,x,y]=sim('schema_base_s',tau,OPTIONS);
  figure(1);
  plot(t,x); hold on                         % Graficazione
  text(tf-0.3,xf+0.2,['tf=' num2str(tf)])
  figure(2);
  plot(tau,u); hold on                       % Graficazione
  text(tau(end)-0.3,u(end)+0.2,['tf=' num2str(tf)])
end
figure(1); grid
title(['Carica di un condensatore: V0=' num2str(x0) ', Vf=' num2str(xf)])
ylabel('Funzione di uscita V(t)')
xlabel('Tempo t (sec.)')
%
figure(2); grid
title(['Carica di un condensatore: V0=' num2str(x0) ', Vf=' num2str(xf)])
ylabel('Funzione di ingresso u(t)')
xlabel('Tempo t (sec.)')
```