Osservabilità e ricostruibilità

- *Osservabilità*: il problema dell'osservabilità consiste nel determinare lo *stato iniziale* $\mathbf{x}(t_0)$ mediante osservazioni degli ingressi $\mathbf{u}(t)$ e delle uscite $\mathbf{y}(t)$ del sistema considerato per $t \in [t_0, t_1]$.
  - *Definizione*. Uno stato iniziale $\mathbf{x}(t_0)$ di un sistema dinamico è compatibile con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ed uscita $\mathbf{y}(\cdot)$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ed una funzione di uscita $\mathbf{y}(\cdot)$ tale che $\mathbf{y}(\tau) = \eta(\tau, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(\cdot)),\ \tau \in [t_0, t_1]$.
  - Indicheremo con
  $$\mathcal{E}^-(t_0, t_1, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$$
  l'*insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}(t_0)$ compatibili* con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ed uscita $\mathbf{y}(\cdot)$, nell'intervallo $[t_0, t_1]$.

- *Ricostruibilità*: il problema della ricostruibilitá consiste nel determinare lo *stato finale* $\mathbf{x}(t_1)$ mediante osservazioni degli ingressi $\mathbf{u}(t)$ e delle uscite $\mathbf{y}(t)$ per $t \in [t_0, t_1]$.
  - *Definizione*. Uno stato finale $\mathbf{x}(t_1)$ di un sistema dinamico è compatibile con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ed uscita $\mathbf{y}(\cdot)$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$, una funzione di uscita $\mathbf{y}(t)$ e uno stato iniziale $\mathbf{x}(t_0) \in \mathcal{E}^-(t_0, t_1, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$ tale che $\mathbf{x}(t_1) = \psi(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(\cdot))$.
  - Indicheremo con
  $$\mathcal{E}^+(t_0, t_1, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$$
  l'*insieme degli stati finali $\mathbf{x}(t_1)$ compatibili* con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ed uscita $\mathbf{y}(\cdot)$, nell'intervallo $[t_0, t_1]$.

- Per sistemi stazionari i due insiemi $\mathcal{E}^-$ ed $\mathcal{E}^+$ sono funzione solo dell'intervallo di tempo $t_1 - t_0$ per cui in questo caso si pone $t_0 = 0$ e si usa la seguente notazione semplificata:
$$\mathcal{E}^-(t_1, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot)), \qquad \mathcal{E}^+(t_1, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$$

Sistemi lineari invarianti tempo-discreti

Consideriamo un sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$ discreto, lineare e stazionario:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Osservabilità:

- *Definizione*. Uno stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ viene detto non osservabile in k passi se appartiene all'insieme $\mathcal{E}^-(k) = \mathcal{E}^-(k,\ 0,\ 0)$, cioè se è compatibile con le successioni di ingresso e di uscita identicamente nulle, $\mathbf{u}(\tau) = 0$ e $\mathbf{y}(\tau) = 0$ per $\tau \in [0,\ k-1]$:

$$0 = \mathbf{y}(\tau) = \mathbf{C}\mathbf{A}^\tau \mathbf{x}(0), \qquad \text{per } \tau \in [0,\ k-1]$$

cioè se

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}^-(k)} \mathbf{x}(0) = \mathcal{O}^-(k)\,\mathbf{x}(0)$$

dove con $\mathcal{O}^-(k)$ si è indicata la *matrice di osservabilità in k passi*.

- L'insieme $\mathcal{E}^-(k)$ degli stati iniziali $\mathbf{x}(0)$ *non osservabili in k passi* è uno spazio vettoriale che coincide con il Kernel della matrice $\mathcal{O}^-(k)$:

$$\boxed{\mathcal{E}^-(k) = \ker[\mathcal{O}^-(k)]}$$

- I sottospazi non osservabili $\mathcal{E}^-(k)$ in k passi soddisfano la seguente catena di inclusioni (n è la dimensione dello spazio degli stati):

$$\mathcal{E}^-(1) \supseteq \mathcal{E}^-(2) \supseteq \ldots\ldots \supseteq \mathcal{E}^-(n) = \mathcal{E}^-(n+1) = \ldots$$

- Il più piccolo sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-(n)$ si ottiene, al più, in n passi.

- L'insieme $\mathcal{E}^-$ degli stati iniziali $\mathbf{x}(0)$ *non osservabili* (*cioè non osservabili in un numero qualunque di passi*) è uno spazio vettoriale che coincide con lo spazio $\mathcal{E}^-(n)$ degli stati non osservabili in n passi:

$$\boxed{\mathcal{E}^- = \mathcal{E}^-(n) = \ker[\mathcal{O}^-(n)]}$$

- Il sottospazio $\mathcal{E}^-$ viene detto *sottospazio non osservabile* del sistema e si determina nel modo seguente:

$$\boxed{\mathcal{E}^- = \ker\,\mathcal{O}^-} \qquad\qquad \mathcal{O}^- \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

dove con $\mathcal{O}^- = \mathcal{O}^-(n)$ si è indicata la *matrice di osservabilità* del sistema.

- *Definizione*. Un sistema $\mathcal{S}$ viene detto *osservabile* se il sottospazio $\mathcal{E}^-$ contiene solo lo stato 0.

- *Proprietà* . Un sistema $\mathcal{S}$ è *osservabile* se e solo se vale una delle seguenti relazioni:

  – $\ker\mathcal{O}^- = \{0\}$

  – rango $\mathcal{O}^- = n$

- Uno stato iniziale $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}^-(k, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$ è compatibile con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ e di uscita $\mathbf{y}(\cdot)$ nell'intervallo $[0, k[$ se la seguente relazione è soddisfatta per $\tau \in [0, k-1]$:

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{CA}^\tau\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{CA}^{\tau-1-i}\mathbf{Bu}(i) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(\tau)$$

cioè se

$$\boxed{\mathbf{y}_l(\tau) = \mathbf{CA}^\tau\mathbf{x}(0)}$$

dove con $\mathbf{y}_l(\tau) = \mathbf{y}(\tau) - \sum_{i=0}^{\tau-1} \mathbf{CA}^{\tau-1-i}\mathbf{Bu}(i) - \mathbf{D}\,\mathbf{u}(\tau)$ si è indicata l'evoluzione libera del sistema che può essere calcolata esattamente partendo dalla conoscenza delle successioni di ingresso $\mathbf{u}(\tau)$ e di uscita $\mathbf{y}(\tau)$ per $\tau \in [0, k-1]$.

- Per sistemi lineari invarianti vale la seguente proprietà:

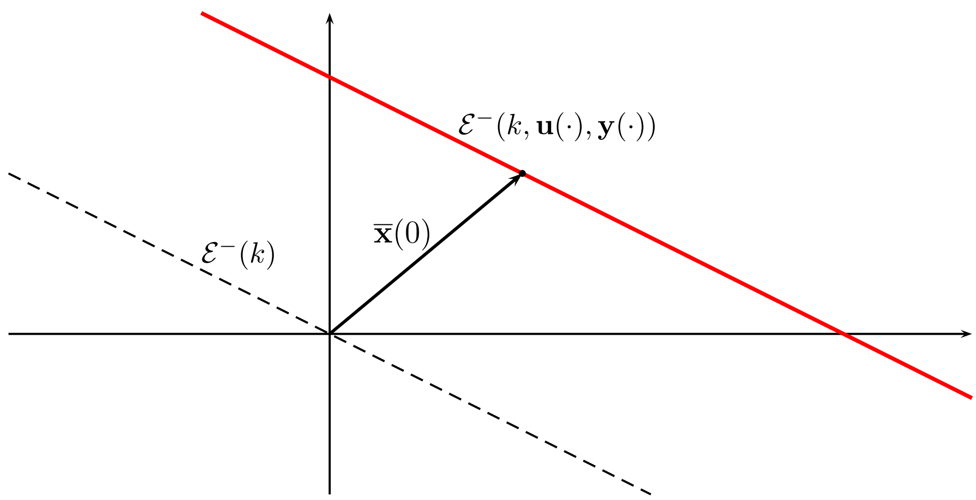
$$\boxed{\mathcal{E}^-(k, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot)) = \mathcal{E}^-(k, 0, \mathbf{y}_l(\cdot))}$$

  Nella determinazione dell'insieme $\mathcal{E}^-(k, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$ degli stati iniziali compatibili con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ e di uscita $\mathbf{y}(\cdot)$, l'unica funzione che è realmente importante è l'evoluzione libera $\mathbf{y}_l(\tau)$.

- *Proprietà*. L'insieme $\mathcal{E}^-(k, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$ è una varietà lineare che si ottiene sommando ad una soluzione particolare $\overline{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{E}^-(k, 0, \mathbf{y}_l(\cdot))$ il sottospazio degli stati non osservabili in k passi $\mathcal{E}^-(k) = \mathcal{E}^-(k, 0, 0)$:

$$\boxed{\mathcal{E}^-(k, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot)) = \overline{\mathbf{x}}(0) + \mathcal{E}^-(k)}$$

- Rappresentazione grafica:



- Se nella precedente relazione si pone $k = n$, si ottiene l'insieme $\mathcal{E}^-(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$ degli stati iniziali $\mathbf{x}(0)$ compatibili con le successioni $\mathbf{u}(\cdot)$ ed $\mathbf{y}(\cdot)$ in un numero qualunque di passi, :

$$\boxed{\mathcal{E}^-(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot)) = \overline{\mathbf{x}}(0) + \mathcal{E}^-}$$

  Tale inseme contiene al suo interno un solo elemento $\overline{\mathbf{x}}(0)$ per ogni coppia di successioni $\mathbf{u}(\cdot)$ ed $\mathbf{y}(\cdot)$ *se e solo se* $\mathcal{E}^- = 0$, cioè se il sistema è completamente osservabile. Vale quindi la seguente proprietà.

- *Proprietà*. Se un sistema lineare è completamente osservabile, allora esiste *un solo suo stato iniziale* $\overline{\mathbf{x}}(0)$ compatibile con qualunque coppia di successioni di ingresso $\mathbf{u}(k)$ e di uscita $\mathbf{y}(k)$ del sistema, con $k \in [0, n]$.

Ricostruibilità:

- È il problema di determinare lo stato finale $\mathbf{x}(k)$ all'istante k compatibile con la conoscenza delle successioni di ingresso $\mathbf{u}(0), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$ e di uscita $\mathbf{y}(0), \ldots, \mathbf{y}(k-1)$.

- Se il sistema è osservabile in k, allora l'insieme $\mathcal{E}^-(k, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$ contiene un solo elemento $\overline{\mathbf{x}}(0)$ e quindi anche lo stato finale $\overline{\mathbf{x}}(k)$ è univocamente determinato:
$$\overline{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}^k \overline{\mathbf{x}}(0) + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$

- Se invece il sistema non è osservabile in k passi, $\mathcal{E}^-(k, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot)) = \overline{\mathbf{x}}(0) + \mathcal{E}^-(k)$ e quindi l'insieme $\mathcal{E}^+(k,\, \mathbf{u}(\cdot),\, \mathbf{y}(\cdot))$ degli stati finali $\overline{\mathbf{x}}(k)$ compatibili con le successioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ed uscita $\mathbf{y}(\cdot)$ è il seguente:
$$\mathcal{E}^+(k,\, \mathbf{u}(\cdot),\, \mathbf{y}(\cdot)) = \overline{\mathbf{x}}(k) + \underbrace{\mathbf{A}^k \mathcal{E}^-(k)}_{\mathcal{E}^+(k)}$$
cioè è la somma di una soluzione particolare $\overline{\mathbf{x}}(k)$ con il sottospazio
$$\boxed{\mathcal{E}^+(k) = \mathbf{A}^k \mathcal{E}^-(k)}$$
degli stati finali non ricostruibili in k passi.

- Un sistema è *ricostruibile in k passi* se $\mathcal{E}^+(k) = \mathbf{A}^k \mathcal{E}^-(k) = \{0\}$ cioè se
$$\boxed{\mathcal{E}^-(k) \subseteq \ker \mathbf{A}^k}$$

- Il sistema si dice *ricostruibile* se esiste un k tale per cui $\mathcal{E}^-(k) \subseteq \ker \mathbf{A}^k$.

- Se un sistema discreto è ricostruibile lo è, al più, in n passi. La condizione di ricostruibilità può quindi essere espressa nel modo seguente:
$$\boxed{\mathcal{E}^- = \ker \mathcal{O}^- \subseteq \ker \mathbf{A}^n}$$

- *Nota*. Da quest'ultima relazione risulta evidente che la condizione di osservabilità implica, ma non è implicata, dalla condizione di ricostruibilità:

$$\text{Osservabilità} \Rightarrow \text{Ricostruibilità}$$

$$\text{Osservabilità} \not\Leftarrow \text{Ricostruibilità}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare discreto:

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) \end{aligned}\right.$$

Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente *evoluzione libera*: $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 0$.

La matrice di osservabilià del sistema è

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{O}^- = 4$$

Essendo tale matrice non singolare, il sistema è completamente osservabile per cui, se il problema è risolubile, esso ammette una sola soluzione. La soluzione $\mathbf{x}_0$ si determina nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}\mathbf{x}_0 = \mathcal{O}^-\mathbf{x}_0 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_0 = [\mathcal{O}^-]^{-1}\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix}$$

Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'unico stato iniziale compatibile con l'evoluzione libera assegnata cercato è quindi $\mathbf{x}_0 = [0,\ 1,\ 1]$.

<u>Nota</u>: è univocamente determinata anche l'evoluzione libera $y(\tau)$ per $\tau \geq 3$:

$$y(\tau) = \mathbf{CA}^\tau\mathbf{x}_0$$

cioè $y(3) = -4$, $y(4) = -12$, $y(5) = -28$, ecc.

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$.

- Il sistema non è completamente osservabile

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{E}^- = \mathrm{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'insieme degli stati iniziali compatibili con l'evoluzione libera $y(0) = 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 4$ si determina calcolando una soluzione particolare $\mathbf{x}_p$ e sommando ad essa il sottospazio di non osservabilità $\mathcal{E}^-$. La soluzione $\mathbf{x}_p$ si determina risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_p \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{y} = \mathcal{O}^- \mathbf{x}_p$$

Una soluzione esiste perchè il vettore $\mathbf{y}$ è contenuto nell'immagine della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathbf{y} \in \mathrm{Im}\mathcal{O}^- \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'insieme degli stati iniziali compatibili con l'evoluzione libera data è quindi il seguente:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_p + \mathcal{E}^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \mathrm{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Calcolare l'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con la seguente evoluzione libera: $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$.

La matrice di osservabilità del sistema è:

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice è 2 per cui il sistema non è completamente osservabile. L'insieme degli stati iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ compatibili con l'evoluzione libera $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$ sono tutti e soli quelli che soddisfano la seguente relazione:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \mathcal{O}^- \mathbf{x}_0 \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

Il vettore $\mathbf{y}$ non è combinazione lineare delle colonne della matrice $\mathcal{O}^-$, per cui il sistema non ammette soluzioni. Non esiste quindi nessuna condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ compatibile con l'evoluzione libera assegnata.

Sistemi lineari invarianti tempo-continui

Sia $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{B},\, \mathbf{C},\, \mathbf{D})$ un sistema lineare, tempo-continuo e stazionario:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Le proprietà di osservabilità e di ricostruibilità di questo sistema sono del tutto simili a quelle viste per i sistemi discreti.

Osservabilità:

- *Definizione*. Uno stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ viene detto *non osservabile in* $[0,\ t]$ se è compatibile con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\tau)$ e di uscita $\mathbf{y}(\tau)$ identicamente nulle nell'intervallo di tempo $\tau \in [0,\ t]$:

$$0 = \mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}\,\tau}\mathbf{x}(0), \qquad\qquad \text{per } \tau \in [0,\ t]$$

- *L'insieme $\mathcal{E}^-(t)$ degli stati iniziali $\mathbf{x}(0)$ non osservabili in $[0,\ t]$ è un sottospazio vettoriale*

$$\boxed{\mathcal{E}^-(t) = \ker O_t}$$

dove con O_t si è indicato l'operatore lineare $O_t : \mathbf{X} \to \mathcal{Y}(t)$ che associa allo stato iniziale $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{X}$ la corrispondente evoluzione libera $y(\tau) \in \mathcal{Y}(t)$:

$$O_t : \mathbf{x}(0) \to \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(0), \qquad\qquad 0 \le \tau \le t$$

- *Proprietà*. *Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^- = \mathcal{E}^-(t)$ non dipende dalla durata dell'intervallo $t > 0$ e coincide con il kernel della stessa* matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$ *precedentemente definita per sistemi tempo-discreti.*

$$\boxed{\mathcal{E}^- = \ker[\mathcal{O}^-]}$$

- Quindi, per sistemi tempo-continui, la possibilità di determinare esattamente l'unico stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ compatibile con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ e di uscita $\mathbf{y}(\cdot)$ non dipende dalla durata dell'intervallo $[0,\ t]$, purchè non nullo, ma dipende solo dal rango della matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$.

Ricostruibilità:

- Nel caso dei sistemi tempo-continui la condizione di *osservabilità* è equivalente a quella di *ricostruibilità*. In questo caso, infatti, i sottospazi di non osservabilità $\mathcal{E}^-$ e di non ricostruibilità $\mathcal{E}^+$ sono legati fra di loro dalla seguente relazione:

$$\boxed{\mathcal{E}^+ = e^{\mathbf{A}t}\,\mathcal{E}^-}$$

- Poichè la matrice $e^{\mathbf{A}t}$ è sempre invertibile qualunque sia la matrice $\mathbf{A}$, i due sottospazi $\mathcal{E}^+$ e $\mathcal{E}^-$ hanno sempre la stessa dimensione. Si può inoltre dimostrare che essi coincidono:

$$\boxed{\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^-}$$

- Da quest'ultima relazione risulta evidente che per sistemi tempo-continui la condizione di osservabilità implica ed è implicata dalla condizione di ricostruibilità:

$$\boxed{\text{Osservabilità} \Leftrightarrow \text{Ricostruibilità}}$$

Dualità

- Dato un sistema continuo o discreto $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, il sistema $\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$, viene detto *sistema duale* di $\mathcal{S}$.

numero di ingressi di $\mathcal{S}$	$=$	numero di uscite di $\mathcal{S}_D$
numero di uscite di $\mathcal{S}$	$=$	numero di ingressi di $\mathcal{S}_D$

- *Proprietà di raggiungibilità e osservabilità*. Le matrici di raggiungibilità $\mathcal{R}_D^+$ ed di osservabilità $\mathcal{O}_D^-$ del sistema duale $\mathcal{S}_D$ sono legate alle matrici $\mathcal{R}^+$ e $\mathcal{O}^-$ del sistema $\mathcal{S}$ dalle relazioni:

$$\mathcal{R}_D^+ = [\mathbf{C}^T \; \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \ldots (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}^T = (\mathcal{O}^-)^T$$

$$\mathcal{O}_D^- = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix} = [\mathbf{B} \; \mathbf{A}\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^T = (\mathcal{R}^+)^T$$

- *Proprietà*. Per sistemi discreti, se $\mathcal{S}$ è *controllabile* allora $\mathcal{S}_D$ è *ricostruibile*.

- *Proprietà*: Per i sistemi dinamici $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_D$ valgono le seguenti proprietà:

$\mathcal{S}$ raggiungibile	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{S}_D$ osservabile
$\mathcal{S}$ osservabile	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{S}_D$ raggiungibile
$\mathcal{S}$ controllabile	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{S}_D$ ricostruibile
$\mathcal{S}$ ricostruibile	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{S}_D$ controllabile

- Se due sistemi algebricamente equivalenti $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ sono legati dalla trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{x}'$, i corrispondenti sistemi duali $\mathcal{S}_D$ e $\mathcal{S}'_D$ sono legati fra di loro dalla trasformazione $\mathbf{x}_D = \mathbf{P}\,\mathbf{x}'_D$ dove $\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{T}^{-T}}$:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}) & \overset{\mathbf{T}}{\Rightarrow}\ \mathcal{S}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T},\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{C}\mathbf{T}) \\ \Updownarrow \text{ Dualità} & \Updownarrow \text{ Dualità} \\ \mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T,\ \mathbf{C}^T,\ \mathbf{B}^T) & \overset{\mathbf{P}}{\Rightarrow}\ \mathcal{S}'_D = (\mathbf{T}^T\mathbf{A}^T\mathbf{T}^{-T},\ \mathbf{T}^T\mathbf{C}^T,\ \mathbf{B}^T\mathbf{T}^{-T}) \end{array}$$

Forma standard di osservabilità

- *Proprietà. Ogni sistema lineare $\mathcal{S} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ (continuo o discreto) non completamente osservabile può essere portato in forma "standard di osservabilità", cioè è algebricamente equivalente ad un sistema $\overline{\mathcal{S}} = \{\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}}, \overline{\mathbf{D}}\}$ dove le matrici $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$ e $\overline{\mathbf{D}}$ hanno la seguente struttura:*

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{1,1} & 0 \\ \overline{\mathbf{A}}_{2,1} & \overline{\mathbf{A}}_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

- Posto $\rho = n - \text{dim}\mathcal{E}^- < n$, la matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porta il sistema in forma standard di osservabilità ha la seguente struttura:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{P}\,\overline{\mathbf{x}}$$

  dove $\mathbf{R}_1 \in \mathbf{R}^{\rho \times n}$ è formata da ρ righe linearmente indipendenti della matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$, e dove $\mathbf{R}_2 \in \mathbf{R}^{(n-\rho)\times n}$ è una qualunque matrice che rende non singolare la matrice di trasformazione $\mathbf{P}^{-1}$.

- *Proprietà. Il sottosistema di dimensione ρ caratterizzato dalle matrici $\overline{\mathbf{A}}_{1,1}$ e $\overline{\mathbf{C}}_1$ è completamente osservabile.*

- Il sottosistema $(\overline{\mathbf{A}}_{1,1},\ \overline{\mathbf{B}}_1,\ \overline{\mathbf{C}}_1)$, è detto *sottosistema osservabile* e rappresenta la parte del sistema originario che è osservabile dall'uscita.

- Il sottosistema $(\overline{\mathbf{A}}_{2,2},\ \overline{\mathbf{B}}_2,\ 0)$, caratterizzato dalle matrici $\overline{\mathbf{A}}_{2,2}$, $\overline{\mathbf{B}}_2$, e $\overline{\mathbf{C}}_2 = 0$, è detto *sottosistema non osservabile* e rappresenta la parte del sistema originario che non influenza in nessun modo l'uscita $\mathbf{y}$ del sistema.

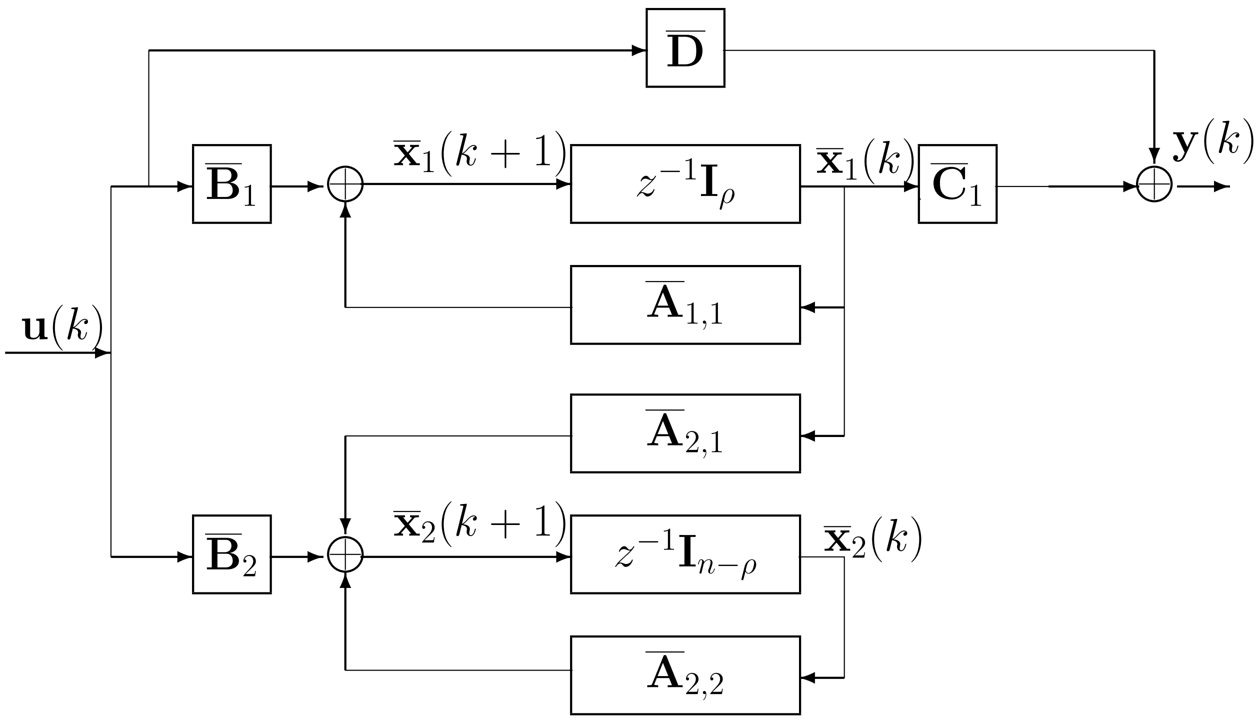
- Anche in questo caso gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ vengono suddivisi in due gruppi: gli autovalori della parte osservabile (quelli della matrice $\overline{\mathbf{A}}_{1,1}$) e gli autovalori della parte non osservabile (quelli della matrice $\overline{\mathbf{A}}_{2,2}$).

- Osservando l'uscita $\mathbf{y}$ non è possibile in nessun modo osservare lo stato del sottosistema non osservabile.

- Nel caso discreto, consideriamo il vettore di stato $\overline{\mathbf{x}}(k)$ partizionato in due parti: la componente *osservabile* $\overline{\mathbf{x}}_1$ e quella *non osservabile* $\overline{\mathbf{x}}_2$: $\overline{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{cc} \overline{\mathbf{x}}_1 & \overline{\mathbf{x}}_2 \end{array}\right]^T$, dove $dim\,\overline{\mathbf{x}}_1 = \rho$. Le equazioni del sistema sono:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{x}}_1(k+1) = & \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\overline{\mathbf{x}}_1(k)+ & & \overline{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(k) \\ \overline{\mathbf{x}}_2(k+1) = & \overline{\mathbf{A}}_{2,1}\overline{\mathbf{x}}_1(k)+ & \overline{\mathbf{A}}_{2,2}\overline{\mathbf{x}}_2(k)+ & \overline{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = & \overline{\mathbf{C}}_1\overline{\mathbf{x}}_1(k)+ & & \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Il corrispondente schema a blocchi è:



- Una analoga scomposizione vale anche per sistemi a tempo continuo.
- <u>*Proprietà*</u>. *La matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ [o $\mathbf{H}(s)$] di un sistema dinamico lineare, coincide con la matrice di trasferimento della sola parte* osservabile *cioè è influenzato solo dalle matrici del sottosistema osservabile ($\overline{\mathbf{A}}_{1,1}$, $\overline{\mathbf{B}}_1$, $\overline{\mathbf{C}}_1$).*

<u>Prova</u>. la matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \overline{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}})^{-1}\overline{\mathbf{B}}$ vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C}_1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{1,1} & 0 \\ -\mathbf{A}_{2,1} & z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{2,2} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{array}\right] = \\ &= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C}_1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{1,1})^{-1} & 0 \\ *** & (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{2,2})^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{array}\right] = \\ &= \mathbf{C}_1(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_{1,1})^{-1}\mathbf{B}_1 \end{aligned}$$

Esempio. Dato seguente sistema lineare stazionario continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Portare il sistema in forma standard di osservabilità.

Sol. La matrice di osservabilità del sistema è:

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{O}^- = 0$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ è singolare. Il sistema non è completamente osservabile per cui è possibile calcolare la matrice di trasformazione $\mathbf{P}$ che porta il sistema in forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) + \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

La parte non osservabile è "semplicemente" stabile in quanto ha un autovalore nell'origine: $s = 0$.

La matrice di trasferimento:

$$G(s) = \mathbf{C}_o(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_o)^{-1}\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2(s+1)}{s^2+3}$$

è funzione della sola parte osservabile del sistema.