Rappresentazione in s dei sistemi lineari continui.

• Applicando la trasformazione di Laplace alle funzioni di *stato* ed *uscita* di un sistema lineare:

$$\mathcal{L}\left(\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s)\end{array}\right)$$

si ottengono le seguenti relazioini:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + [\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{u}(s)\end{cases}$$

• Quando l'ingresso è nullo, $\mathbf{u}(t) = 0$, si ha l'<u>*evoluzione libera*</u>:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0\end{cases} \quad\leftrightarrow\quad \begin{cases}\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\end{cases}$$

da cui si ricava che:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]}$$

• Quando lo stato iniziale è nullo, $\mathbf{x}_0 = 0$, si ha l'<u>*evoluzione forzata*</u>:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{u}(s)\end{cases} \quad\leftrightarrow\quad \begin{cases}\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau\\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{cases}$$

Matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$: è la matrice *razionale fratta* di dimensioni $(p \times m)$ definita nel seguente modo:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s) \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}}$$

• Esempio di calcolo di $\mathbf{H}(s)$ in Matlab:

```
                                    +-                                     -+
A=[0 1; -2 -3];                     |      s - 2             2        1     |
B=[1 0; 1 1];                       |  --------------- + 1, ----- - -----   |
C=[0 1; 1 -1];                      |  (s + 1) (s + 2)      s + 2   s + 1   |
D=[1 0; 0 0];            -->        |                                       |
syms s                              |          6             2        3     |
Hs=C*inv(s*eye(2)-A)*B+D;           |    ---------------,   ----- - -----   |
pretty(simplify(Hs))                |    (s + 1) (s + 2)    s + 1   s + 2   |
                                    +-                                     -+
```

• **Matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$:**

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\,\frac{\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

• L'*inversa* di una matrice $\mathbf{M}$ quadrata di ordine n non singolare, è definita come segue:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\mathrm{agg}\;\mathbf{M}}{\det\;\mathbf{M}}$$

La *matrice aggiunta* $\mathrm{agg}\,\mathbf{M}$ è la *trasposta* (coniugata trasposta) della matrice dei complementi algebrici $M_{i,j}$ della matrice $\mathbf{M}$. Il complemento algebrico $M_{i,j}$ è $(-1)^{i+j}$ volte il determinante della matrice $(n-1)\times(n-1)$ che si ottiene eliminando la $i-$esima riga e la $j-$esima colonna della matrice $\mathbf{M}$.

• $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è un polinomio di grado n.

• $\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è una matrice polinomiale i cui elementi hanno grado minore o uguale ad $n-1$.

• Le funzioni razionali fratte presenti nella matrice $\mathbf{H}(s) - \mathbf{D} = \mathbf{C}\;(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\;\mathbf{B}$ sono tutte strettamente proprie: $n \geq m$.

• *Proprietà*. La matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ non cambia se si applica al sistema una qualsiasi trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\overline{\mathbf{x}}$ nello spazio degli stati:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, \qquad \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D}.$$

Infatti si ha che:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(s) &= \overline{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}})^{-1}\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{D}}\\
&= \mathbf{C}\mathbf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\\
&= \mathbf{C}\mathbf{T}\left[\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}\right]^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\\
&= \mathbf{C}\mathbf{T}[\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}]\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\\
&= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}
\end{aligned}$$

• *Proprietà*. Il guadagno statico $\mathbf{H}_0$ si ottiene da $\mathbf{H}(s)$ ponendo $s = 0$:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}(s)|_{s=0} = -\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{y}_0 = \mathbf{H}_0\,\mathbf{u}_0.$$

Se l'ingresso $\mathbf{u}_0$ è costante il valore a regime dell'uscita è $\mathbf{y}_0 = \mathbf{H}_0\,\mathbf{u}_0$.

Esempio. Calcolare l'esponenziale di matrice della matrice $\mathbf{A}$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right] \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è:

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$$

Si ottiene quindi che (in Matlab: `syms s; As=inv(s*eye(2)-A); pretty(As)`):

$$\mathbf{A}_s = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Antitrasformando i singoli termini di questa matrice si ottiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right] = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}\right] = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

per cui, sostituendo, si ha che (in Matlab: `Eat=ilaplace(As); pretty(Eat)`):

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{A}_s] = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

- Esempio di calcolo diretto di $e^{\mathbf{A}t}$ in Matlab:

```
                                 +-                                                 -+
A=[0 1; -2 -3];                  |   2 exp(-t) - exp(-2 t),   exp(-t) - exp(-2 t)   |
syms t;              -->         |                                                   |
Eat=expm(A*t);                   |  2 exp(-2 t) - 2 exp(-t), 2 exp(-2 t) - exp(-t)  |
pretty(Eat)                      +-                                                 -+
```

Rappresentazione in z dei sistemi lineari discreti.

• Applicando la trasformazione $\mathcal{Z}$ alla funzione di *stato* e alla funzione di *uscita* di un sistema discreto lineare tempo-invariante si ha:

$$\mathcal{Z}\left(\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{array}\right.\right)=\left\{\begin{array}{l}z(\mathbf{x}(z)-\mathbf{x}_0)=\mathbf{A}\mathbf{x}(z)+\mathbf{B}\mathbf{u}(z)\\ \mathbf{y}(z)=\mathbf{C}\mathbf{x}(z)+\mathbf{D}\mathbf{u}(z)\end{array}\right.$$

• Risolvendo il sistema rispetto al vettore $\mathbf{x}(z)$ si ottiene:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0+(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)\\ \mathbf{y}(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0+[\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{u}(z)\end{array}\right.$$

• Quando l'ingresso è nullo, $\mathbf{u}(k)=0$, si ottiene l'*evoluzione libera*:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0\end{array}\right. \qquad \leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(k)=\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0\end{array}\right.$$

• Vale quindi la seguente relazione:

$$\boxed{\mathbf{A}^k=\mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]}$$

• Quando lo stato iniziale è nullo, $\mathbf{x}_0=0$, si ottiene l'*evoluzione forzata*:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z).\\ \mathbf{y}(z)=\underbrace{[\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]}_{\mathbf{H}(z)}\mathbf{u}(z)\end{array}\right. \qquad \leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(k)=\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)\\ \mathbf{y}(k)=\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{array}\right.$$

• **Matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$**: è la matrice *razionale fratta* di dimensioni $(p\times m)$ definita nel seguente modo:

$$\mathbf{y}(z)=\mathbf{H}(z)\mathbf{u}(z) \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{H}(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}}$$

Tutte le funzioni razionali fratte della matrice $\mathbf{H}(z)$ hanno grado relativo $r\geq 0$. Se $\mathbf{D}=0$ tutte le funzioni di $\mathbf{H}(z)$ sono strettamente proprie: $r>0$.

• Il guadagno statico $\mathbf{H}_0$ della matrice $\mathbf{H}(z)$ si calcola ponendo $z=1$:

$$\mathbf{H}_0=\mathbf{H}(z)|_{z=1}=\mathbf{C}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{y}_0=\mathbf{H}_0\,\mathbf{u}_0.$$

Esempio. Calcolare l'evoluzione libera del seguente sistema discreto autonomo:

$$\mathbf{x}(n+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(n)$$

a partire dalla condizione iniziale $x(0) = \mathbf{x}_0$.

Soluzione. La soluzione del problema posto è formalmente nota:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$$

La matrice $\mathbf{A}^n$ può essere calcolata utilizzando la seguente relazione:

$$\mathbf{A}^n = \mathcal{Z}^{-1}\left[(z\mathbf{I} - A)^{-1} z\right]$$

Il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono: $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Svolgendo i calcoli si ha che:

$$\mathbf{A}^n = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \frac{\begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix} z}{(z+1)(z+2)} \right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{z+3}{(z+1)(z+2)} & \dfrac{1}{(z+1)(z+2)} \\ \dfrac{-2}{(z+1)(z+2)} & \dfrac{z}{(z+1)(z+2)} \end{bmatrix} z \right\}$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{2\,z}{(z+1)} - \dfrac{z}{(z+2)} & \dfrac{z}{(z+1)} - \dfrac{z}{(z+2)} \\ \dfrac{-2\,z}{(z+1)} + \dfrac{2\,z}{(z+2)} & \dfrac{-z}{(z+1)} + \dfrac{2\,z}{(z+2)} \end{bmatrix} \right\}$$

Antitrasformando, si ottiene il seguente risultato:

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 2(-1)^n - (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n \\ -2(-1)^n + 2(-2)^n & -(-1)^n + 2(-2)^n \end{bmatrix}$$

- Esempio di calcolo diretto di $\mathbf{A}^k$ in Matlab:

```
                                 +-                                   -+
syms z                           |        n        n        n        n |
A=[0 1; -2 -3];                  |  2 (-1)  - (-2) ,   (-1)  - (-2)    |
Ad=z*inv(z*eye(2)-A);   -->      |                                     |
Ak=iztrans(Ad);                  |       n        n        n        n  |
pretty(Ak)                       | 2 (-2)  - 2 (-1) , 2 (-2)  - (-1)   |
                                 +-                                   -+
```