

## Forme canoniche

- Si consideri il seguente sistema dinamico SISO caratterizzato dalle matrici  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$  e  $d_0 \in \mathbf{R}$ :

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \\ y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) + d_0 u(t) \end{cases}$$

Il sistema è tempo-continuo, lineare e invariante. Il numero di parametri che caratterizzano la parte dinamica ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ ) di questo sistema è  $n^2 + 2n$ : gli  $n^2$  parametri della matrice  $\mathbf{A}$  e i  $2n$  parametri dei due vettori  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ .

- Operando opportune trasformazioni di coordinate  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z}$  nello spazio degli stati è possibile ottenere rappresentazioni matematiche “diverse ma equivalenti” del sistema dinamico di partenza. Le rappresentazioni matematiche caratterizzate dal minor numero possibile di parametri significativi prendono il nome di forme canoniche.
- Le forme canoniche di maggior interesse che verranno presentate di seguito sono le seguenti:
  - Forma canonica di controllabilità (o di controllo)
  - Forma canonica di osservabilità
  - Forma canonica di Jordan
- Tutte le forme canoniche sono sempre caratterizzate da un numero massimo di parametri pari a  $2n + 1$ .

## Forma canonica di controllo

- Sia dato il seguente sistema dinamico SISO:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \\ y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) + d_0 u(t) \end{cases}$$

- Se la matrice di raggiungibilità  $\mathcal{R}^+$  è invertibile:

$$\mathcal{R}^+ = [ \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} ]$$

la trasformazione di coordinate  $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \mathbf{x}_c$  dove  $\mathbf{T}_c = \mathcal{R}^+ \mathbf{T}_\alpha$ :

$$\mathbf{T}_c = \underbrace{[ \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} ]}_{\mathcal{R}^+} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \vdots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \vdots & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \alpha_{n-1} & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_\alpha}$$

porta il sistema in *forma canonica di controllo*:

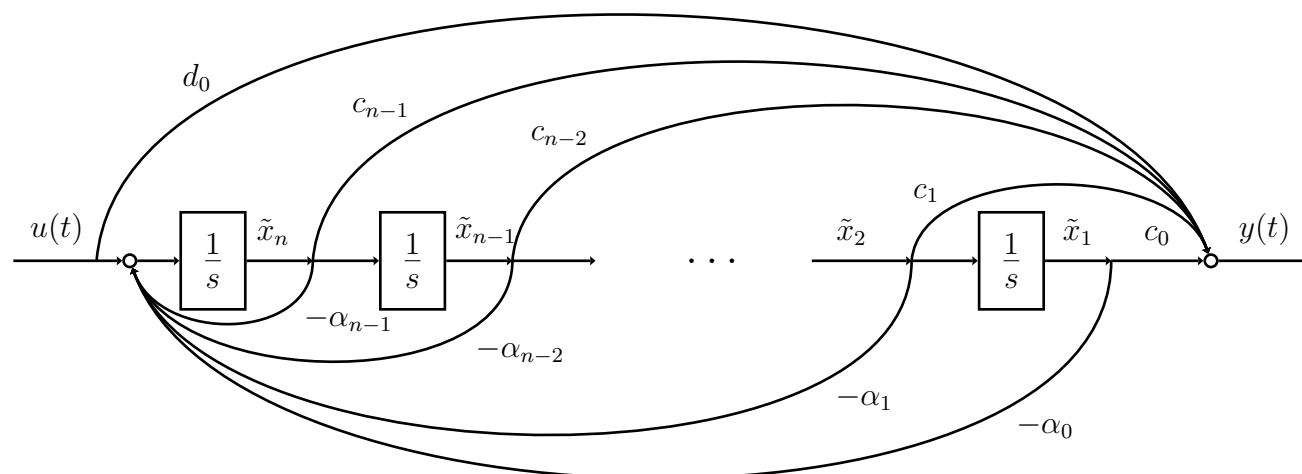
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [ c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1} ] \mathbf{x}_c(t) + d_0 u(t) \end{cases}$$

dove gli  $\alpha_i$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$ :

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

- Il vettore di stato è  $\mathbf{x}_c = [ \tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad \tilde{x}_3 \quad \dots \quad \tilde{x}_n ]^T$ .

- Schema a blocchi corrispondente alla forma canonica di controllo:



- In base alla formula di Mason, il determinante  $\Delta(s)$  di questo grafo è

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{s} + \frac{\alpha_{n-2}}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_0}{s^n} \\ &= \frac{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}{s^n} \end{aligned}$$

- Al numeratore della formula di Mason si ha l'espressione

$$N(s) = d_0\Delta(s) + \frac{c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + c_{n-3}s^{n-3} + \dots + c_1s + c_0}{s^n}$$

- La funzione di trasferimento  $G(s) = Y(s)/U(s)$  dello schema a blocchi è quindi la seguente

$$G(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)} = d_0 + \frac{c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \dots + c_1s + c_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

- Si noti che vi è una corrispondenza biunivoca diretta tra i coefficienti  $c_i$  ed  $\alpha_i$  della funzione di trasferimento  $G(s)$  e i coefficienti del sistema posto in forma canonica di controllo.

## Forma canonica di osservabilità

- Sia dato il seguente sistema dinamico SISO:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} u(t) \\ y(t) = \mathbf{c} \mathbf{x}(t) + d_0 u(t) \end{cases}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Se la matrice di osservabilità  $\mathcal{O}^-$  è invertibile, allora la trasformazione di coordinate  $\mathbf{x} = \mathbf{T}_o \mathbf{x}_o$  dove  $\mathbf{T}_o = (\mathbf{T}_\alpha \mathcal{O}^-)^{-1}$  :

$$\mathbf{T}_o = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_\alpha} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}^-} \right\}^{-1}$$

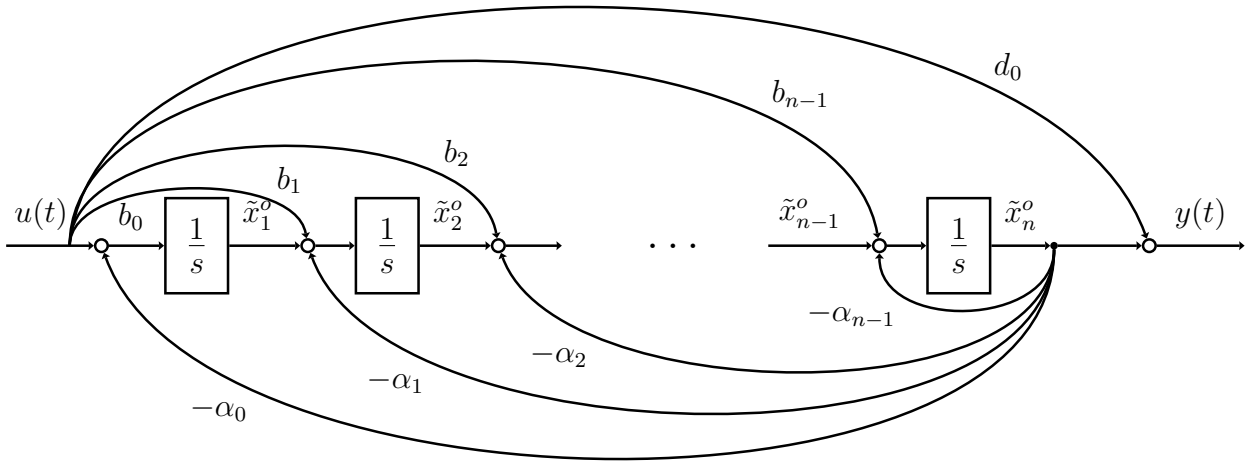
porta il sistema in forma canonica di osservabilità:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^o \\ \tilde{x}_2^o \\ \tilde{x}_3^o \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1}^o \\ \tilde{x}_n^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 ] \mathbf{x}_o(t) + d_0 u(t) \end{cases}$$

dove  $\alpha_i$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$ :

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

- Schema a blocchi corrispondente alla forma canonica di osservabilità:



- In base alla formula di Mason, il determinante  $\Delta(s)$  di questo grafo è:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{s} + \frac{\alpha_{n-2}}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_0}{s^n} \\ &= \frac{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}{s^n} \end{aligned}$$

- Al numeratore della formula di Mason si ha la seguente espressione:

$$N(s) = d_0\Delta(s) + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + b_{n-3}s^{n-3} + \dots + b_1s + b_0}{s^n}$$

- La funzione di trasferimento  $G(s) = Y(s)/U(s)$  è quindi la seguente:

$$G(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)} = d_0 + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}$$

- Si noti che vi è una corrispondenza biunivoca diretta tra i coefficienti  $b_i$  ed  $\alpha_i$  della funzione di trasferimento  $G(s)$  e i coefficienti del sistema posto in forma canonica di osservabilità.

**Esempio.** Esempio di calcolo delle forme canoniche in Matlab (Forme\_Canoniche.m):

```

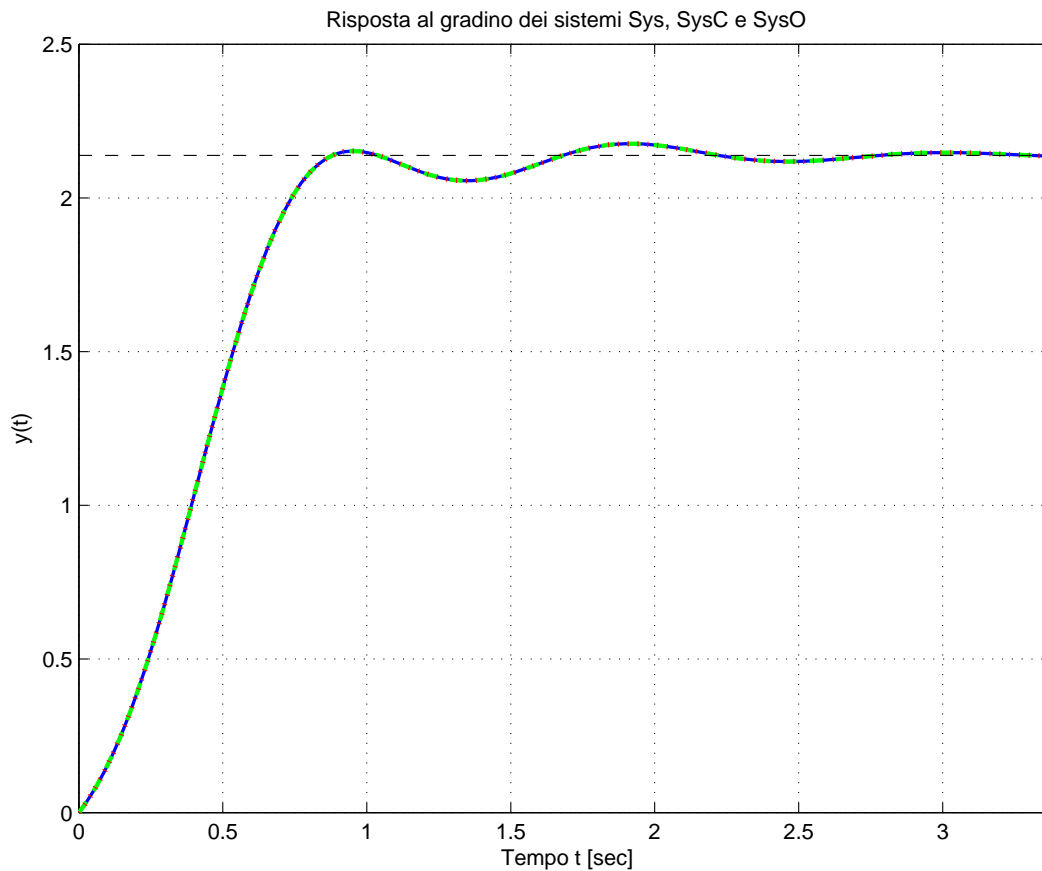
clc; echo on % Cancella la pagina e attiva l'eco dei comandi
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Definizione random di un sistema dinamico di ordine n
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
n=5; Poli_CompleSSI=1; % Dimensione del sistema e tipo di poli
sigma=-1-rand(1,n)*5; % Parte reale dei poli sigma = [-6 -1]
Apoli=diag(sigma); % Matrice Apoli
if Poli_CompleSSI;
    for ii=1:2:n-1
        Apoli(ii+1,ii)=-Apoli(ii+1,ii+1);
        Apoli(ii,ii+1)=Apoli(ii+1,ii+1);
        Apoli(ii+1,ii+1)=Apoli(ii,ii);
    end
end
T=rand(n); A=T\Apoli*T % Matrice A di un generico sistema stabile
B=rand(n,1) % Matrice B di un generico sistema con m=1
C=rand(1,n) % Matrice C di un generico sistema con p=1
Sys=ss(A,B,C,0); % Sys = sistema dinamico tempo continuo
poli=roots(poly(A)) % Autovalori della matrice A
pause; clc % Premi un tasto
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Forma canonica di raggiungibilita'
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Rpiu=ctrb(A,B); % Matrice di raggiungibilita'
T_alpha=Calcola_T_alpha(A); % Matrice T_alpha
Tc=Rpiu*T_alpha; % Tc della forma canonica di controllo
Ac=Tc\A*Tc % Matrice di sistema
Bc=Tc\B % Matrice degli ingressi
Cc=C*Tc % Matrice delle uscite
SysC=ss(Ac,Bc,Cc,0); % SysC = sistema in forma canonica di controllo
roots(poly(Ac)) % Autovalori della matrice Ac
pause; clc % Premi un tasto
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Forma canonica di osservabilita'
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Omeno=obsv(A,C); % Matrice di osservabilita'
To=inv(T_alpha*Omeno); % To della forma canonica di osservabilita'
Ao=To\A*To % Matrice di sistema
Bo=To\B % Matrice degli ingressi
Co=C*To % Matrice delle uscite
Sys0=ss(Ao,Bo,Co,0); % Sys0 = sistema in forma canonica di osservabilita'
roots(poly(Ao)) % Autovalori della matrice Ao
pause; clc % Premi un tasto
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% La risposta al gradino e' la stessa per i tre sistemi Sys, SysC e Sys0
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(1); clf % Apre una nuova figura
[y,t]=step(Sys); % Risposta al gradino del sistema originario
plot(t,y,'b','LineWidth',1.5) % Visualizza la risposta al gradino in blu
hold on; grid on % Sovrappone i grafici e aggiunge la griglia al grafico
[y,t]=step(SysC); % Risposta al gradino del sistema in forma canonica di controllo
plot(t,y,'g--','LineWidth',2) % Visualizza la risposta al gradino in verde tratteggiato
[y,t]=step(Sys0); % Risposta al gradino del sistema in forma canonica osservabilita'
plot(t,y,'r:', 'LineWidth',2.5) % Visualizza la risposta al gradino in rosso a puntini
HO=-C*inv(A)*B; % Guadagno statico G(0) del sistema SISO
plot(t,0*t+HO,'k--') % Visualizza i valori finali dell'uscita y(t)
xlim([0 t(end)]) % Allinea il grafico all'asse dei tempi
title('Risposta al gradino dei sistemi Sys, SysC e Sys0') % Titolo della figura
xlabel('Tempo t [sec]') % Asse dei tempi
ylabel('y(t)'); echo off % Asse delle ordinate y(t) e disattiva l'eco dei comandi

```

● Funzione Sys, Calcola\_T\_alpha:

```
function T_alpha = Calcola_T_alpha(A)
n=size(A,1); % Dimensione della matrice A
T_alpha=zeros(n,n); % Inizializzazione di T_alpha
alpha=fliplr(poly(A)); % Coefficienti alpha del polinomio caratteristico
for ii=1:n
    T_alpha(ii,n+1-ii)=1; % Valore unitario sulla diagonale trasversa
    for jj=1:n-ii
        T_alpha(ii,jj)=alpha(jj+ii); % Posizionamento dei coefficienti alpha_i
    end
end
return
```

● Risposta al gradino dei sistemi Sys, SysC e SysO:



● Sistema Sys:

```
A =
-1.5178  -4.3240  -21.2336  10.3578  -6.0690
13.2074  11.5035  26.7385  -0.3523  16.0921
 2.6183   3.8999   0.9749  -1.7145   1.5169
-3.1311   1.1282  16.6624 -11.1747   4.2230
-11.6894 -11.9699 -10.0695  -2.0044 -11.1338

B =
0.1992
0.5896
0.5491
0.6020
0.0835

poli =
-1.2607 + 5.7861i
-1.2607 - 5.7861i
-3.1040 + 2.0504i
-3.1040 - 2.0504i
-2.6183

C =
0.3842  0.4064  0.9693  0.5298  0.2463
```

● Sistema Sys0 in forma canonica di controllo:

Ac =

1.0e+03 \*

-0.0000	0.0010	-0.0000	-0.0000	-0.0000
0	0.0000	0.0010	0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0010	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0010
-1.2707	-1.1467	-0.4216	-0.0874	-0.0113

Bc =

0  
0  
0  
0  
1

poli =

-1.2607 + 5.7861i  
-1.2607 - 5.7861i  
-3.1040 + 2.0504i  
-3.1040 - 2.0504i  
-2.6183

Cc =

1.0e+03 \*

2.7169 1.3021 0.1901 0.0200 0.0012

● Sistema Sys0 in forma canonica di osservabilità:

Ao =

1.0e+03 \*

0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-1.2707
0.0010	-0.0000	-0.0000	0.0000	-1.1467
0.0000	0.0010	0.0000	0.0000	-0.4216
0.0000	-0.0000	0.0010	0.0000	-0.0874
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0010	-0.0113

Bo =

1.0e+03 \*

2.7169  
1.3021  
0.1901  
0.0200  
0.0012

poli =

-1.2607 + 5.7861i  
-1.2607 - 5.7861i  
-3.1040 + 2.0504i  
-3.1040 - 2.0504i  
-2.6183

Co =

0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 1.0000

● Funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema:

$$G_s = \frac{1.188 s^4 + 20.03 s^3 + 190.1 s^2 + 1302 s + 2717}{s^5 + 11.35 s^4 + 87.42 s^3 + 421.6 s^2 + 1147 s + 1271}$$