

Modello matematico di un sistema fisico

- La costruzione del modello matematico è anche un procedimento che permette di comprendere a pieno il fenomeno fisico che si vuol descrivere.
- Compromesso fra la semplicità del modello e la precisione nella descrizione del fenomeno fisico.
- Lo stesso fenomeno fisico può essere descritto mediante modelli matematici diversi. Esempio: dinamica di una popolazione.

– Equazione di Maltus (modello lineare):

$$\dot{x}(t) = r x(t) \quad \rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{rt}$$

dove $x(t)$ è la densità della popolazione, r è il tasso di crescita e x_0 è la densità all'istante $t = 0$. Questo modello è valido solamente se la densità è sufficientemente elevata e se non vi sono limitazioni sulle risorse ambientali.

– Equazione logistica di Verhulst (modello non lineare):

$$\dot{x}(t) = r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t)$$

dove K rappresenta la capacità portante del sistema. In questo caso è possibile determinare la soluzione in forma chiusa:

$$x(t) = \frac{K x_0 e^{rt}}{K + x_0 - x_0 e^{rt}}$$

Questa soluzione è stata ottenuta in Matlab usando i seguenti comandi:

```
syms x(t) r K x0
x=simplify(dsolve(diff(x)==r*(1+x/K)*x,x(0)==x0));
pretty(x)
-->
      K x0 exp(r t)
-----
K + x0 - x0 exp(r t)
```

– Per descrivere altri fenomeni si utilizza un modello più generale:

$$\dot{x}(t) = r \left[-a + bx(t) - cx^2(t) \right] x(t)$$

In questo caso non è possibile determinare in modo semplice la soluzione in forma chiusa dell'equazione differenziale non lineare.

Modello termico di un edificio

- Modello statico:

$$Q = K(\theta - \theta_e)$$

↓

$$\theta = \theta_e + \frac{Q}{K}$$

Q : potenza termica erogata
(calore nell'unità di tempo)

θ : temperatura dell'edificio;

θ_e : temperatura esterna;

K : conduttività termica

c : capacità termica

- Modello dinamico lineare tempo-continuo:

$$Q dt = c d\theta + K(\theta - \theta_e)dt$$

↓

$$\dot{\theta} = \frac{Q}{c} - \frac{K}{c}(\theta - \theta_e)$$

Esempio di modello dinamico discreto

- Modello tempo-invariante:

$$x(k+1) = (1+i)[x(k) + u(k)]$$

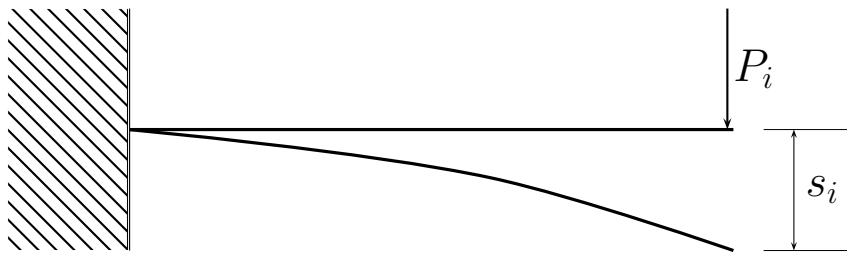
dove $x(k)$ è il valore del capitale all'istante k , i è il tasso di interesse e $u(k)$ è il versamento effettuato all'istante k .

- Modello tempo-variante:

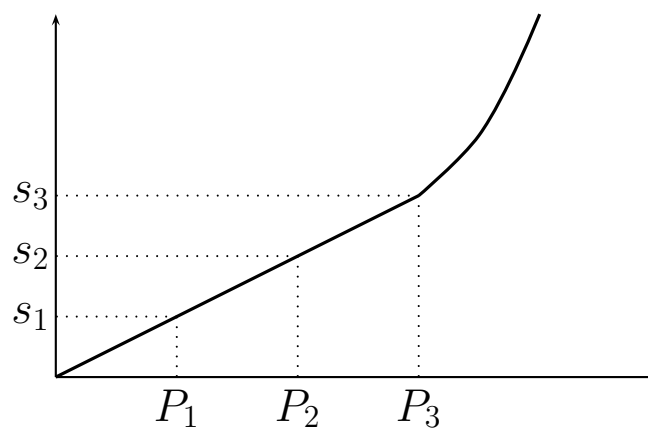
$$x(k+1) = (1+i(k))[x(k) + u(k)]$$

dove $i(k)$ è il tasso di interesse all'istante k .

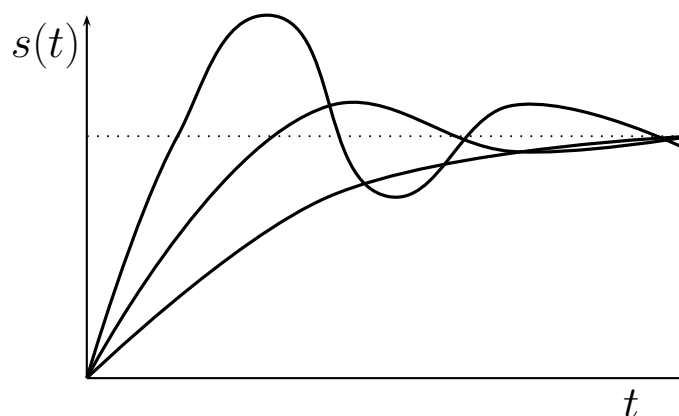
Esempio. Si consideri una trave fissata ad una estremità e si supponga di caricare l'estremità libera con forze costanti di entità pari a P_1, P_2, \dots



Quando si applica la forza P_i , la trave si flette e, dopo un transitorio, si ferma nella posizione s_i . Riportando in un grafico i valori dello spostamento s in funzione del carico P si ottiene un andamento che, nella sua parte lineare, coincide con la legge di Hook

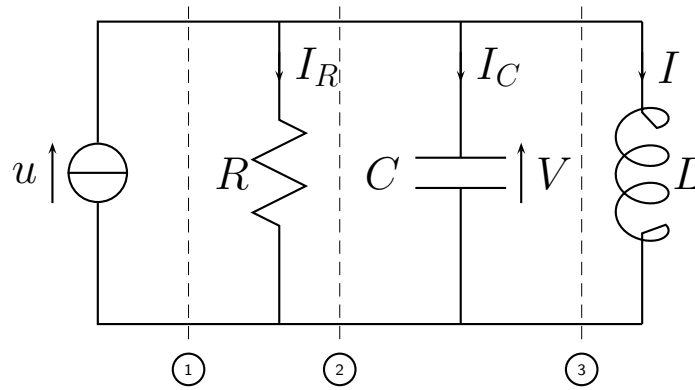


Tale curva costituisce un *modello statico* del sistema in quanto non fornisce alcuna informazione sulla dinamica con cui l'estremità libera passa da una posizione di equilibrio all'altra.

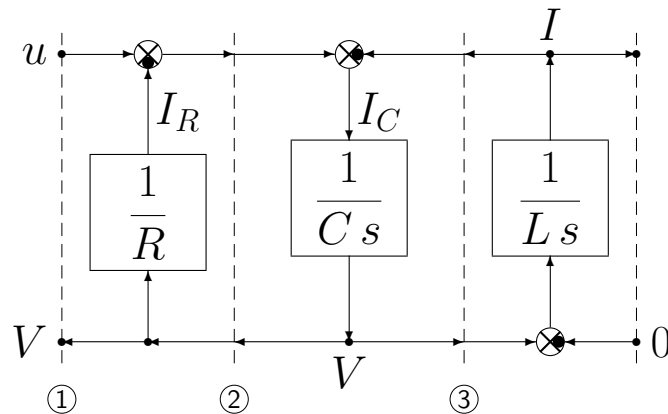


Solo un *modello dinamico* è in grado di fornire informazioni sul tipo di transitorio che caratterizza il sistema.

Esempio. Si consideri la seguente rete elettrica:



Modello dinamico POG:



Per determinare il modello dinamico di questo sistema si procede ad assegnare una variabile di stato ad ogni elemento dinamico del sistema, cioè ad ogni elemento che è in grado di accumulare energia: $Q = CV$ e $\Phi = LI$. Le equazioni dinamiche del sistema sono:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = C\dot{V} = I_C = u - I - \frac{V}{R} \\ \frac{d\Phi}{dt} = L\dot{I} = V \end{cases}$$

Indicando con \mathbf{x} il vettore di stato

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{I} \end{bmatrix}$$

le equazioni dinamiche del sistema possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

In questo caso, quindi, il sistema è lineare tempo-invariante.

Si supponga ora di voler tener conto nel modello del fatto che la resistenza varia al variare della temperatura: $R = R(\theta)$. In questo caso occorre aggiungere al sistema anche la seguente equazione differenziale che descrive la dinamica termica della resistenza:

$$\dot{\theta} = \frac{V^2}{cR} - \frac{G}{c}\theta + \frac{G}{c}\theta_e$$

I parametri hanno il seguente significato

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \text{ temperatura della resistenza} \\ \theta_e \text{ temperatura esterna} \\ c \text{ capacit\`a termica della resistenza} \\ G \text{ conduttanza termica della resistenza} \end{array} \right.$$

Le equazioni dinamiche del sistema sono ora le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = \frac{u}{C} - \frac{I}{C} - \frac{V}{CR(\theta)} \\ \dot{I} = \frac{V}{L} \\ \dot{\theta} = \frac{V^2}{cR(\theta)} - \frac{G}{c}\theta + \frac{G}{c}\theta_e \end{array} \right.$$

Indicando con $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$ il vettore di stato e di uscita:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} V \\ I \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u \\ \theta_e \end{bmatrix}$$

il sistema pu\`o essere descritto in forma compatta nel modo seguente:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$$

Il sistema \u00e8 ora non lineare tempo invariante.