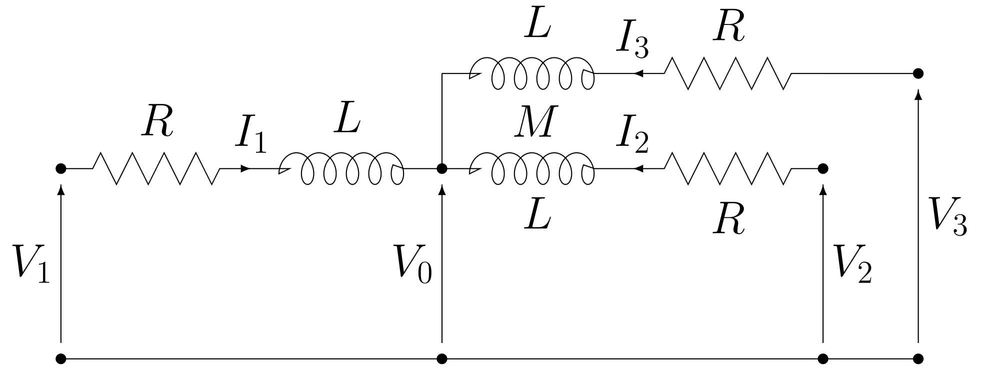
Circuito trifase

Si consideri il seguente circuito trifase collegato a stella.



Si scelgano come variabili di stato le tre correnti I_1, I_2 e I_3 che circolano nelle tre induttanze e si introducano le seguenti matrici:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_0 = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

I parametri L ed M rappresentano i coefficienti di auto e mutua induzione delle tre induttanze presenti nel circuito. L'equazione differenziale che descrive la dinamica della prima induttanza si ottiene imponendo che la derivata del flusso $\Phi_1 = LI_1 + MI_2 + MI_3$ concatenato con la prima induttanza sia uguale alla caduta di tensione $V_{L1} = V_1 - V_0 - RI_1$ ai capi dell'induttanza:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = V_{L1} \qquad \rightarrow \qquad L\dot{I}_1 + M\dot{I}_2 + M\dot{I}_3 = V_1 - V_0 - RI_1$$

Analoghe equazioni differenziali si possono scrivere per le altre due induttanze. Organizzando in forma matriciale le tre equazioni differenziali si ottiene la seguente equazione differenziale matriciale:

$$\begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

che puó essere espressa in forma vettoriale compatta nel seguente modo:

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{I}} = -\mathbf{R}\mathbf{I} + \mathbf{V} - \mathbf{V}_0.$$

Le variabili di stato I_1, I_2 e I_3 sono vincolate dal seguente legame algebrico:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Tale legame può essere espresso in modo vettoriale nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{v}_3^T \mathbf{I} = 0 \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il vettore di stato $\mathbf{I}(t)$ evolve nel tempo ma rimane sempre perpendicolare al vettore $\mathbf{v}_3$. Il modo migliore per "inserire" questo vincolo all'interno della descrizione matematica del sistema è quello di procedere ad una trasformazione di coordinate $\mathbf{I} = \overline{\mathbf{T}}\,\overline{\mathbf{I}}$ nello spazio degli stati nella quale il versore $\overline{\mathbf{v}}_3$ compaia come uno dei vettori della nuova base:

$$\overline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{v}}_1 & \overline{\mathbf{v}}_2 & \overline{\mathbf{v}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{v}}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_3|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

I due versori $\overline{\mathbf{v}}_1$ e $\overline{\mathbf{v}}_2$ rendono ortonormale la matrice di trasformazione $\overline{\mathbf{T}}$. La matrice inversa $\overline{\mathbf{T}}^{-1}$ della matrice ortonormale $\overline{\mathbf{T}}$ é uguale alla sua trasposta:

$$\overline{\mathbf{T}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{T}}^T$$

Per sistemi che abbiano la struttura $\mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ vale la seguente proprietá.

Proprietà. *Se al seguente sistema dinamico:*

$$\begin{cases} \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

si applica la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ *si ottiene il seguente sistema equivalente:*

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{L}}\dot{\overline{\mathbf{x}}} = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

dove:

$$\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{T}, \qquad \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}.$$

Inoltre, se la trasformazione di coordinate è tempo variante, $\mathbf{x} = \mathbf{T}(t)\,\overline{\mathbf{x}}$, la matrice $\overline{\mathbf{A}}$ assume la forma seguente:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}\dot{\mathbf{T}}$$

Prova. Per sostituzione di $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ nel sistema originario si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{T}\dot{\overline{\mathbf{x}}} + \dot{\mathbf{T}}\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\mathbf{T}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{T}\dot{\overline{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{L}\dot{\mathbf{T}})\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

e moltiplicando la prima equazione a sinistra per la matrice $\mathbf{T}^{-1}$ si ottiene:

$$\begin{cases} \overbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{T}}^{\overline{\mathbf{L}}}\,\dot{\overline{\mathbf{x}}} = \overbrace{(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}\dot{\mathbf{T}})}^{\overline{\mathbf{A}}}\,\overline{\mathbf{x}} + \overbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}}^{\overline{\mathbf{B}}}\,\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{T}}_{\overline{\mathbf{C}}}\,\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

Il vantaggio di utilizzare rappresentazioni dinamiche del tipo "$\mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$" sta nel fatto che è possibile operare delle trasformazioni nello spazio degli stati senza dover "invertire" la matrice $\mathbf{L}$ e quindi è possibile trasformare il sistema anche nei casi in cui la matrice $\mathbf{L}$ è singolare.

Proprietà. *Le matrici di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ e $\mathbf{H}(z)$ dei seguenti sistemi dinamici:*

$$\begin{cases} \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

possono essere ottenute utilizzando le seguenti formule:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{L}\,s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}, \qquad \mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(\mathbf{L}\,z - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Prova. La matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ si calcola come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{C}(\mathbf{I}\,s - (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}) + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{L}\,s - \mathbf{A}))^{-1}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}) + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{L}\,s - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{L}\,(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}) + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{L}\,s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \end{aligned}$$

Applicando al sistema:

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{I}} = -\mathbf{R}\mathbf{I} + \mathbf{V} - \mathbf{V}_0$$

la trasformazione di coordinate $\mathbf{I} = \overline{\mathbf{T}}\,\bar{\mathbf{I}}$ si ottiene il sistema trasformato:

$$\underbrace{(\overline{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{L}\overline{\mathbf{T}})}_{\overline{\mathbf{L}}}\,\dot{\bar{\mathbf{I}}} = -\underbrace{(\overline{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{R}\overline{\mathbf{T}})}_{\overline{\mathbf{R}}}\,\bar{\mathbf{I}} + \overline{\mathbf{T}}^{-1}(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0)$$

Essendo $\mathbf{R}$ proporzionale alla matrice identità, si ha che $\overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{R}\overline{\mathbf{T}} = \mathbf{R}$. La matrice trasformata $\overline{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{L}\overline{\mathbf{T}}$ ha invece la seguente struttura:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{L}\overline{\mathbf{T}} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2(L-M)}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{(L+2M)}{\sqrt{3}} \\ \frac{-(L-M)}{\sqrt{6}} & \frac{(L-M)}{\sqrt{2}} & \frac{(L+2M)}{\sqrt{3}} \\ \frac{-(L-M)}{\sqrt{6}} & \frac{-(L-M)}{\sqrt{2}} & \frac{(L+2M)}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (L-M) & 0 & 0 \\ 0 & (L-M) & 0 \\ 0 & 0 & (L+2M) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

I vettori trasformati $\bar{\mathbf{I}} = \overline{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{I}$, $\overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{V}$ e $\overline{\mathbf{V}}_0 = \overline{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{V}_0$ assumono la seguente forma:

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \frac{2I_1-I_2-I_3}{\sqrt{6}} \\ \frac{I_2-I_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{I_1+I_2+I_3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \frac{2V_1-V_2-V_3}{\sqrt{6}} \\ \frac{V_2-V_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{V_1+V_2+V_3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{V}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3V_0}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Essendo $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, la terza componente $\bar{I}_3$ del nuovo vettore di stato $\bar{\mathbf{I}}$ è identicamente nulla: $\bar{I}_3 = 0$:

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2I_1-I_2-I_3}{\sqrt{6}} \\ \frac{I_2-I_3}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La nuova descrizione dinamica del sistema di partenza è ora la seguente:

$$\begin{bmatrix} L-M & 0 & 0 \\ 0 & L-M & 0 \\ 0 & 0 & L+2M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{I}}_1 \\ \dot{\bar{I}}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2V_1-V_2-V_3}{\sqrt{6}} \\ \frac{V_2-V_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{V_1+V_2+V_3-3V_0}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

La terza equazione del sistema esprime un legame statico che permette di determinare il valore V_0 della tensione di centro stella:

$$V_0 = \frac{V_1+V_2+V_3}{3}.$$

Il sistema trifase di partenza ha quindi una dinamica interna del secondo ordine:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} L-M & 0 \\ 0 & L-M \end{bmatrix}}^{\mathbf{L}_b} \overbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{I}}_1 \\ \dot{\bar{I}}_2 \end{bmatrix}}^{\dot{\mathbf{I}}_b} = -\overbrace{\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}}^{\mathbf{R}_b} \overbrace{\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{I}_b} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{2V_1-V_2-V_3}{\sqrt{6}} \\ \frac{V_2-V_3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{\mathbf{V}_b}$$

In forma compatta si può scrivere

$$\mathbf{L}_b\,\dot{\mathbf{I}}_b = -\mathbf{R}\,\mathbf{I}_b + \mathbf{V}_b \qquad \leftrightarrow \qquad (L-M)\,\dot{\mathbf{I}}_b = -R\,\mathbf{I}_b + \mathbf{V}_b$$

Supponiamo ora che la terna di tensioni in ingresso sia equilibrata:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = V_M \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

e che l'unico grado di libertà per il controllo del sistema sia l'ampiezza V_M delle tensioni V_1, V_2 e V_3. Si noti che le tre tensioni V_1, V_2 e V_3 soddisfano lo stesso vincolo algebrico delle correnti:

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{v}_3^T\mathbf{V} = 0$$

La terza componente del vettore $\overline{\mathbf{V}}$ è quindi identicamente nulla. Ne segue che anche $V_0 = 0$. Il vettore $\mathbf{V}_b$ assume invece la seguente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_b &= \begin{bmatrix} \frac{2V_1-V_2-V_3}{\sqrt{6}} \\ \frac{V_2-V_3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = V_M \begin{bmatrix} \frac{2\cos(\theta)-\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})-\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{\sqrt{6}} \\ \frac{\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})-\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= V_M \begin{bmatrix} \frac{3\cos(\theta)}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2\sin(\theta)\sin(\frac{-2\pi}{3})}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = V_M\sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il sistema di partenza diventa quindi lineare *tempo-variante* in quanto la matrice degli ingressi $\mathbf{B}_b$ è funzione del parametro θ:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc} L-M & 0 \\ 0 & L-M \end{array}\right]}_{\mathbf{L}_b}\underbrace{\left[\begin{array}{c} \dot{\bar{I}}_1 \\ \dot{\bar{I}}_2 \end{array}\right]}_{\dot{\mathbf{I}}_b} = -\underbrace{\left[\begin{array}{cc} R & 0 \\ 0 & R \end{array}\right]}_{\mathbf{R}_b}\underbrace{\left[\begin{array}{c} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{array}\right]}_{\mathbf{I}_b} + \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\begin{array}{c} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{array}\right]}_{\mathbf{B}_b} V_M$$

In forma compatta si ottiene la seguente equazione differenziale matriciale:

$$\mathbf{L}_b\,\dot{\mathbf{I}}_b = -\mathbf{R}_b\,\mathbf{I}_b + \mathbf{B}_b\,V_M \qquad (1)$$

Gli autovalori di questo sistema sono $\lambda_{1,2} = \frac{-R}{L-M}$, cioè due autovalori reali.

Posto $\theta = \omega t$ è possibile applicare al precedente sistema (1) la seguente nuova trasformazione di coordinate $\mathbf{I}_b = \mathbf{T}_\omega \mathbf{I}_\omega$ dove:

$$\mathbf{T}_\omega = \left[\begin{array}{cc} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{array}\right], \qquad \mathbf{T}_\omega^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{array}\right].$$

Le matrici $\mathbf{T}_\omega$ e $\mathbf{T}_\omega^{-1}$ rappresentano due rotazioni nel piano di angoli, rispettivamente, $\theta = \omega t$ e $\theta = -\omega t$. Applicando la trasformazione $\mathbf{I}_b = \mathbf{T}_\omega \mathbf{I}_\omega$ al sistema (1) si ottiene il seguente sistema trasformato:

$$\underbrace{\mathbf{T}_\omega^{-1}\mathbf{L}_b\mathbf{T}_\omega}_{\mathbf{L}_\omega}\,\dot{\mathbf{I}}_\omega = (-\underbrace{\mathbf{T}_\omega^{-1}\mathbf{R}_b\mathbf{T}_\omega}_{\mathbf{R}_\omega} - \underbrace{\mathbf{T}_\omega^{-1}\mathbf{L}_b\dot{\mathbf{T}}_\omega}_{\mathbf{A}_\omega})\,\mathbf{I}_\omega + \underbrace{\mathbf{T}_\omega^{-1}\mathbf{B}_b}_{\mathbf{B}_\omega}\,V_M$$

La matrice $\mathbf{T}_\omega$ è tempo variante per cui nel sistema trasformato compare anche il termine $\mathbf{A}_\omega = \mathbf{T}_\omega^{-1}\mathbf{L}_b\dot{\mathbf{T}}_\omega$. In questo caso il termine $\mathbf{A}_\omega$ ha la seguente forma:

$$\mathbf{A}_\omega = \mathbf{T}_\omega^{-1}\mathbf{L}_b\dot{\mathbf{T}}_\omega = \left[\begin{array}{cc} 0 & -\omega(L-M) \\ \omega(L-M) & 0 \end{array}\right]$$

Il vettore trasformato $\mathbf{B}_\omega$ assume la seguente forma:

$$\mathbf{B}_\omega = \mathbf{T}_\omega^{-1}\mathbf{B}_b = \mathbf{T}_\omega^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\begin{array}{c} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \end{array}\right]$$

Ora il vettore trasformato $\mathbf{V}_\omega = \mathbf{B}_\omega V_M$ é costante:

$$\mathbf{V}_\omega = \mathbf{B}_\omega V_M = V_M \left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \end{array}\right]$$

La trasformazione $\mathbf{I}_b = \mathbf{T}_\omega \mathbf{I}_\omega$ ha reso il sistema lineare **tempo-invariante**:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\bar{\mathbf{I}}}_\omega &=& \begin{bmatrix} \frac{-R}{L-M} & \omega \\ -\omega & \frac{-R}{L-M} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}_\omega + \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{(L-M)} \\ 0 \end{bmatrix} V_M \\ \mathbf{I} &=& \mathbf{T}_b \mathbf{T}_\omega \, \bar{\mathbf{I}}_\omega \end{array} \right. \qquad (2)$$

dove con $\mathbf{T}_b$ si è indicata la matrice rettangolare formata dalla prime due colonne della matrice $\overline{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_1 & \bar{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori del sistema (2) sono complessi coniugati:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R}{L-M} \pm j\omega$$

La trasformazione di coordinate tempo-variante $\mathbf{I}_b = \mathbf{T}_\omega \mathbf{I}_\omega$ ha modificato “la parte immaginaria dei poli” del sistema.

Il sistema (2) é un descrizione dinamica completamente equivalente al sistema di equazioni differenziali iniziali:

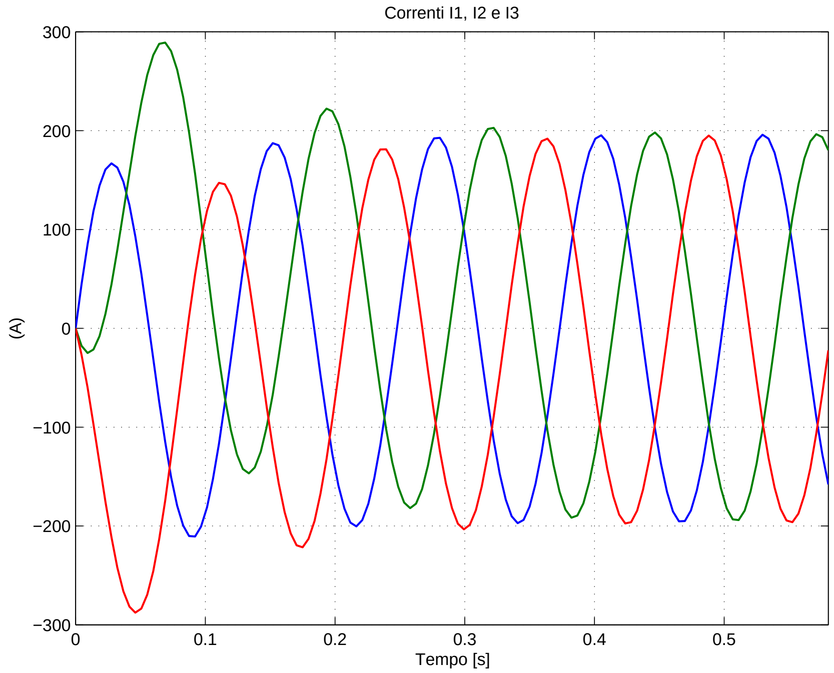
$$\begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

ed ingloba giá al proprio interno il vincolo strutturale sulle correnti:

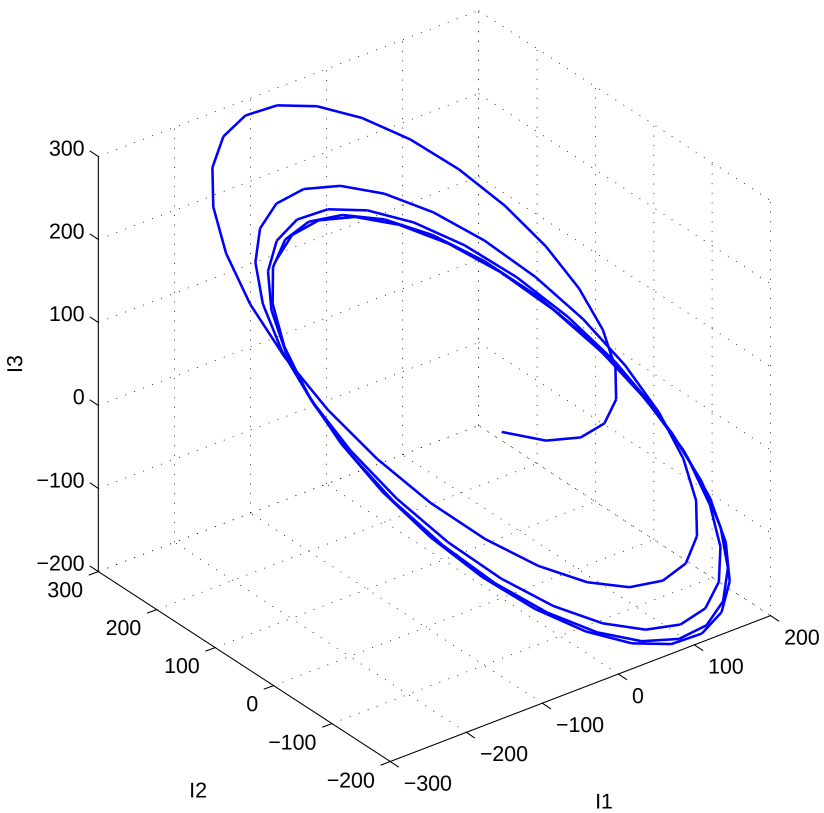
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Simulazioni: spazio degli stati trifase statico

- Andamento temporale delle correnti $\mathbf{I}$. Risposta al gradino $V_M = 100$:

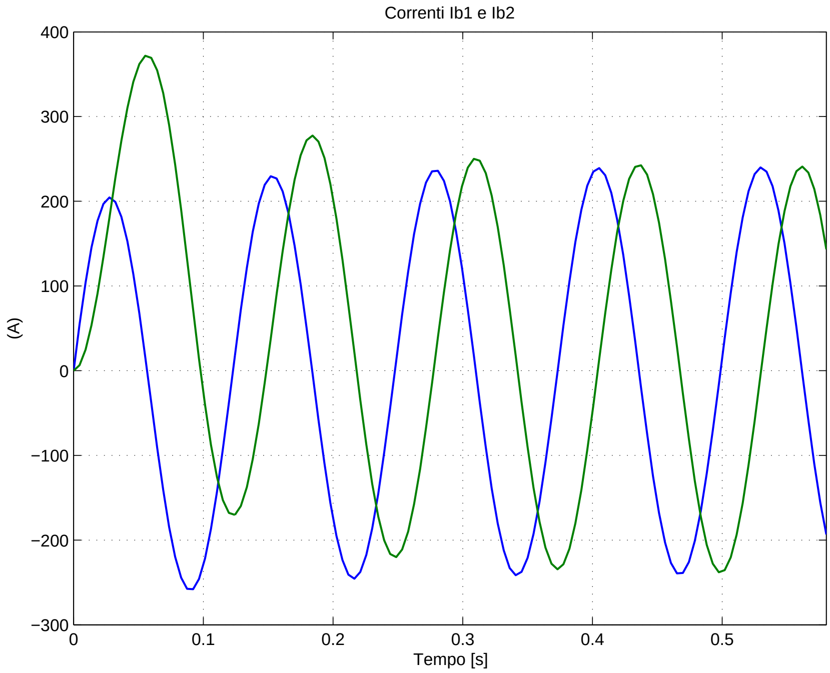


- Traiettoria nello spazio degli stati:

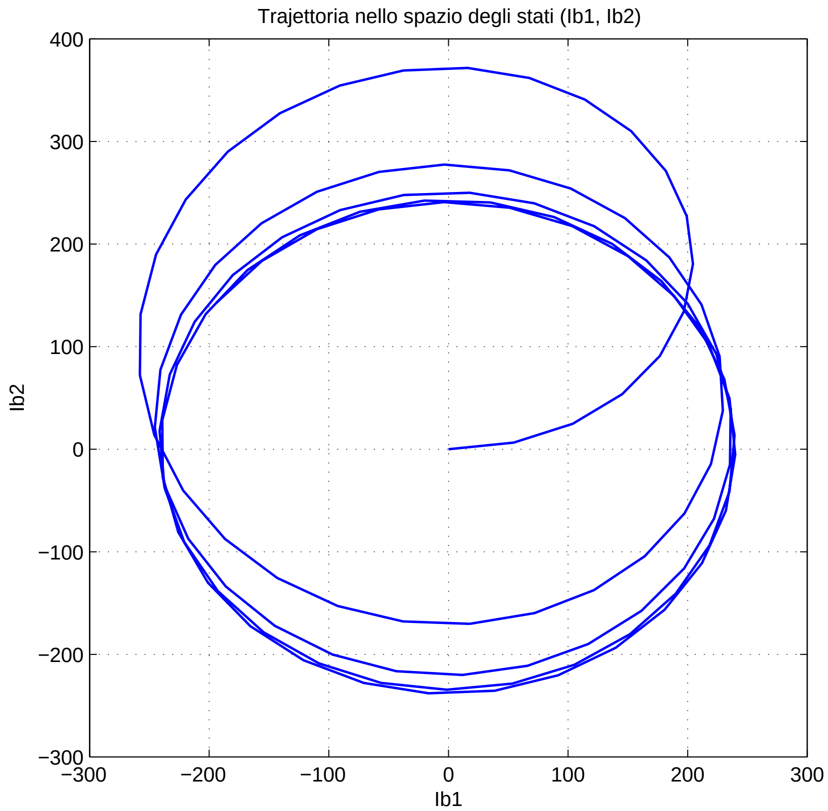


Spazio degli stati bifase statico

- Andamento temporale delle correnti $\mathbf{I}_b$. Risposta al gradino $V_M = 100$:

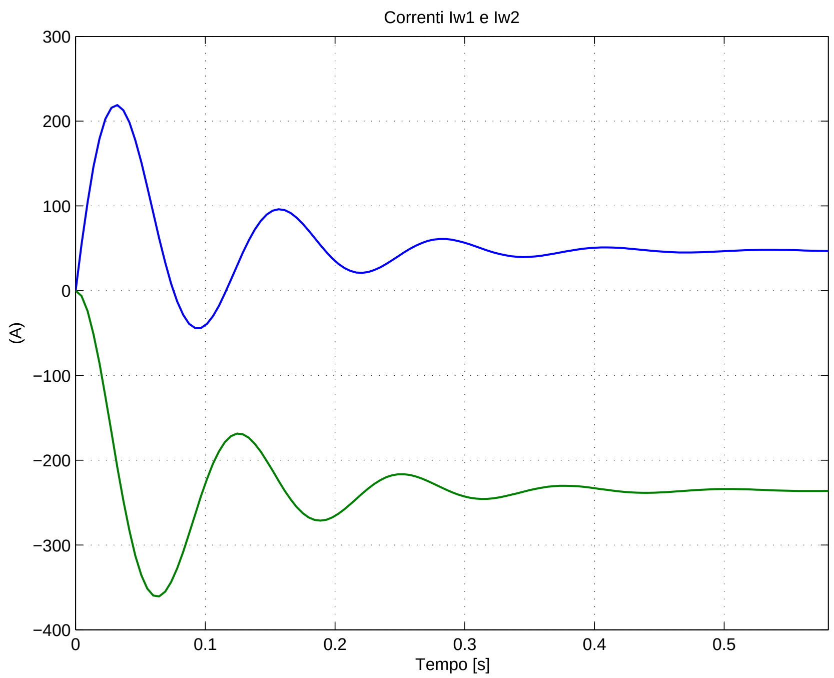


- Traiettoria nello spazio degli stati:

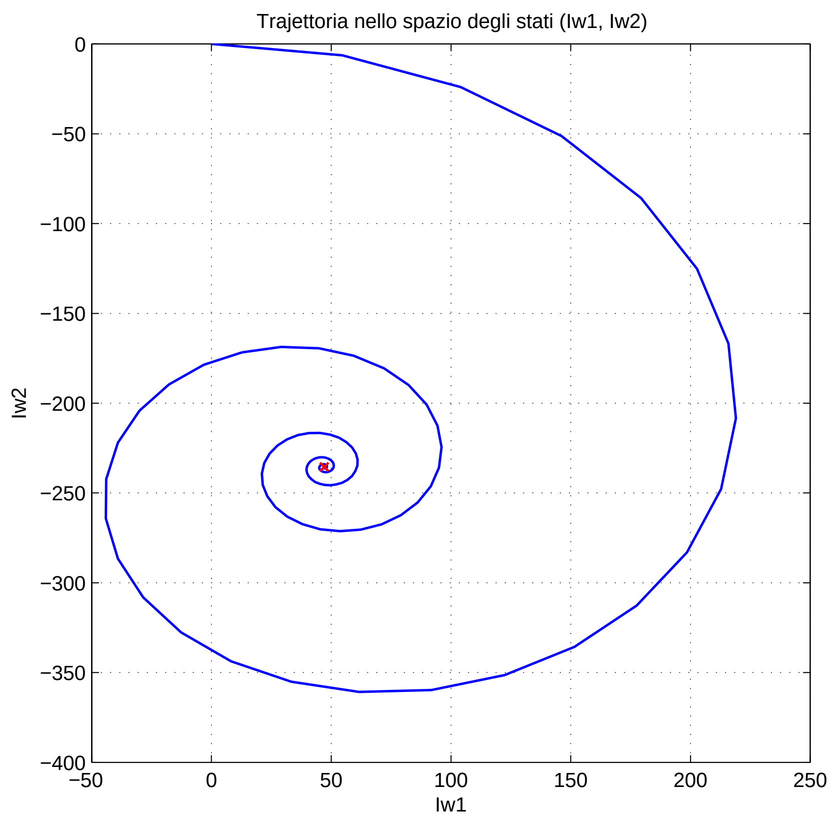


Spazio degli stati bifase ruotante

- Andamento temporale delle correnti $\mathbf{I}_\omega$. Risposta al gradino $V_M = 100$:



- Traiettoria nello spazio degli stati:



```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   Circuito_trifase.m
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all; clc; echo off
set(0,'DefaultFigureWindowStyle','docked') %%%% Figures 'docked' or 'normal'
MainString = mfilename;     % MainString
%%%%% Unit di misura
A=1; ohm=1; V=1; H=1; rad=1; sec=1; Stampa=1;
%%%%% Parametri del sistema
R=0.1*ohm;                  % Resistenza di ogni singolo circuito
L=0.05*H;                   % Autoinduttanza di ogni singolo circuito
M=0.04*H;                   % Mutuainduttanza di ogni singolo circuito
w=50*rad/sec;               % Frequenza di rete
VM=100*V;                   % Ampiezza della tensione in ingresso
%%%%% Matrici di sistema
MA=[ -R/(L-M)       w;
          -w  -R/(L-M)];
MB=[  sqrt(3/2)/(L-M); 0];
MC=[  1   0; 0   1];
SYS=ss(MA,MB,MC,0);         % Sistema SYS nel riferimento ruotante
set(SYS,'InputName','V_M')
set(SYS,'StateName',['Iw_1'; 'Iw_2'])
set(SYS,'OutputName',['Iw_1'; 'Iw_2'])
SYS
%%%%% Risposta al gradino del sistema SYS
[Y t X]=step(SYS);
X=X*VM;                 % La risposta del sistema  lineare rispetto
Y=Y*VM;                 % all'ampiezza VM della tensione di ingresso
Iw1=X(:,1);             % Corrente bifase routante: prima componente
Iw2=X(:,2);             % Corrente bifase routante: seconda componente
Lw=1.2;                 % Larghezza di linea
%
%%%%% Andamento temporale delle correnti Iw1 Iw2
figure(1); clf
plot(t,[Iw1 Iw2],'LineWidth',Lw)
xlim([0 t(end)])
title('Correnti Iw1 e Iw2')
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('(A)'); grid
if Stampa;  eval(['print -depsc ' MainString '_'  num2str(gcf)]); end
%
%%%%% Traiettoria (Iw1 Iw2) nel sistema ruotante
figure(2); clf; hold off
plot(Iw1,Iw2,'LineWidth',Lw); hold on
Iw_ss=-inv(MA)*MB*VM;       % Valore a regime delle correnti Iw1 e Iw2
plot(Iw_ss(1),Iw_ss(2),'rx','LineWidth',Lw)
axis square; grid
title('Trajettoria nello spazio degli stati (Iw1, Iw2)')
ylabel('Iw2')
xlabel('Iw1')
if Stampa;  eval(['print -depsc ' MainString '_'  num2str(gcf)]); end
%
%%%%%  La matrice di trasformazione Tw ha la seguente struttura:
%      Tw=[cos(w*t)  -sin(w*t);
%          sin(w*t)   cos(w*t)];
% L'andamento delle correnti sul piano bifase statico  il seguente:
Ib1=sum(([cos(w*t)  -sin(w*t)].*[Iw1';Iw2']')')';
Ib2=sum(([sin(w*t)   cos(w*t)].*[Iw1';Iw2']')')';
%
%%%%% Andamento temporale delle correnti Ib1 Ib2
figure(3); clf
```

```
plot(t,[Ib1 Ib2],'LineWidth',Lw)
xlim([0 t(end)])
title('Correnti Ib1 e Ib2')
ylabel('(A)'); grid
xlabel('Tempo [s]')
if Stampa;  eval(['print -depsc ' MainString '_'  num2str(gcf)]); end
%
%%%%% Traiettoria (Ib1 Ib2) nel piano bifase statico
figure(4); clf; hold off
plot(Ib1,Ib2,'LineWidth',Lw)
grid; axis square
title('Trajettoria nello spazio degli stati (Ib1, Ib2)')
ylabel('Ib2')
xlabel('Ib1')
if Stampa;  eval(['print -depsc ' MainString '_'  num2str(gcf)]); end
%
%%%%% La matrice di trasformazione Tb ha la forma seguente:
Tb=[
   2/sqrt(6)          0;
  -1/sqrt(6)  1/sqrt(2);
  -1/sqrt(6) -1/sqrt(2)];
I=Tb*[Ib1';Ib2'];
I1=I(1,:)'; I2=I(2,:)'; I3=I(3,:)';
%
%%%%% Andamento temporale delle correnti I1, I2 e I3
figure(5); clf
plot(t,I,'LineWidth',Lw)
xlim([0 t(end)])
title('Correnti I1, I2 e I3')
ylabel('(A)'); grid
xlabel('Tempo [s]')
if Stampa;  eval(['print -depsc ' MainString '_'  num2str(gcf)]); end
%
%%%%% Traiettoria (I1 I2 I3) nel piano trifase statico
figure(6); clf; hold off
plot3(I1,I2,I2,'LineWidth',Lw)
axis square; grid
zlabel('I3')
ylabel('I2')
xlabel('I1')
if Stampa;  eval(['print -depsc ' MainString '_'  num2str(gcf)]); end
return
```