Rappresentazione in s dei sistemi lineari continui.

• Applicando la trasformazione di Laplace alle funzioni di *stato* ed *uscita* di un sistema lineare:

$$\mathcal{L}\left(\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{l}s\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}_0=\mathbf{A}\mathbf{x}(s)+\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}(s)=\mathbf{C}\mathbf{x}(s)+\mathbf{D}\mathbf{u}(s)\end{array}\right)$$

e quindi:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{u}(s)\end{cases}$$

• Quando $\mathbf{u}(t)=0, \forall t\geq 0$, si ha l'*evoluzione libera*:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0\end{cases}\quad\leftrightarrow\quad\begin{cases}\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\end{cases}$$

da cui si ricava che

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t}=\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]}$$

• Quando $\mathbf{x}_0=0$, si ha l'*evoluzione forzata*:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}(s)=[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{u}(s)\end{cases}\quad\leftrightarrow\quad\begin{cases}\mathbf{x}(t)=\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau+\mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{cases}$$

Matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$: è la matrice *razionale fratta* di dimensioni $(p\times m)$ definita nel seguente modo:

$$\mathbf{y}(s)=\mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s)\quad\rightarrow\quad\boxed{\mathbf{H}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}}$$

$$\mathbf{H}(s)=\frac{1}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}\mathbf{C}\,\mathrm{agg}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\,\mathbf{B}+\mathbf{D}.$$

• L'*inversa* di una matrice $\mathbf{M}$ quadrata di ordine n non singolare, è definita come segue:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\text{agg}\,\mathbf{M}}{\det\ \mathbf{M}}$$

La *matrice aggiunta*, $\text{agg}\,\mathbf{M}$, è la *trasposta* (coniugata trasposta) della matrice dei complementi algebrici $M_{i,j}$ della matrice $\mathbf{M}$.
Il complemento algebrico $M_{i,j}$ è $(-1)^{i+j}$ volte il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene eliminando la $i-$esima riga e la $j-$esima colonna di $\mathbf{M}$.

• Le funzioni razionali nella matrice $\mathbf{H}(s) - \mathbf{D}$ sono strettamente proprie in quanto

- $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è un polinomio di grado n,
- $\mathbf{C}\ \text{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\ \mathbf{B}$ è una matrice polinomiale i cui elementi hanno gradi uguali a $n-1$ (o minori, nel caso vi siano cancellazioni di fattori comuni nel numeratore e nel denominatore delle frazioni polinomiali).

Esempio. Calcolare l'esponenziale di matrice della matrice $\mathbf{A}$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right] \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è:

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$$

Si ottiene quindi che

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Antitrasformando i singoli termini di questa matrice si ottiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right] = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}\right] = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

per cui, sostituendo, si ha che

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Questa espressione è identica a quella che si ottiene utilizzando la forma canonica di Jordan.

Rappresentazione in z dei sistemi lineari discreti.

• Applicando la trasformazione "$\mathcal{Z}$" alle funzioni di *stato* ed di *uscita* di un sistema discreto lineare tempo-invariante si ha:

$$\mathcal{Z}\left(\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k)+\mathbf{B}\mathbf{u}(k)\\ \mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{array}\right.\right)=\left\{\begin{array}{l}z(\mathbf{x}(z)-\mathbf{x}_0)=\mathbf{A}\mathbf{x}(z)+\mathbf{B}\mathbf{u}(z)\\ \mathbf{y}(z)=\mathbf{C}\mathbf{x}(z)+\mathbf{D}\mathbf{u}(z)\end{array}\right.$$

• Risolvendo il sistema rispetto al vettore $\mathbf{x}(z)$ si ottiene:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0+(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z)\\ \mathbf{y}(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0+[\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{u}(z)\end{array}\right.$$

• Quando $\mathbf{u}(k)=0, \forall k\geq 0$, si ottiene l'*evoluzione libera*:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0\end{array}\right. \quad\leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(k)=\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0\end{array}\right.$$

• Vale quindi la seguente relazione:

$$\boxed{\mathbf{A}^k=\mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]}$$

• Quando $\mathbf{x}_0=0$, si ottiene l'*evoluzione forzata*:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z).\\ \mathbf{y}(z)=\underbrace{[\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]}_{\mathbf{H}(z)}\mathbf{u}(z)\end{array}\right. \quad\leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}(k)=\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)\\ \mathbf{y}(k)=\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)+\mathbf{D}\mathbf{u}(k)\end{array}\right.$$

• **Matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$**: è la matrice *razionale fratta* di dimensioni $(p\times m)$ definita nel seguente modo:

$$\mathbf{y}(z)=\mathbf{H}(z)\mathbf{u}(z) \quad\rightarrow\quad \boxed{\mathbf{H}(z)=\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}}$$

$$\mathbf{H}(z)=\frac{1}{\det(z\mathbf{I}-\mathbf{A})}\mathbf{C}\ \mathrm{agg}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})\ \mathbf{B}+\mathbf{D}.$$

Gli elementi della matrice $\mathbf{H}(z)$ sono funzioni razionali fratte di grado relativo $r\geq 0$. Se $\mathbf{D}=0$ tutte le funzioni razionali fratte della matrice $\mathbf{H}(z)$ sono strettamente proprie: $r>0$.

Esempio. Calcolare l'evoluzione libera del seguente sistema discreto autonomo

$$\mathbf{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k)$$

a partire dalla condizione iniziale $x(0) = \mathbf{x}_0$. Il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono: $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. La soluzione del problema posto è formalmente nota:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$$

Vengono ora mostrati tre modi diversi di calcolare la matrice $\mathbf{A}^k$.

Soluzione. Uso delle $\mathcal{Z}$-trasformate. Questo procedimento si basa sulla relazione

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\left[(z\mathbf{I} - A)^{-1} z\right]$$

Procedendo nei calcoli si ha che

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \frac{\begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix} z}{(z+1)(z+2)} \right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{z+3}{(z+1)(z+2)} & \dfrac{1}{(z+1)(z+2)} \\ \dfrac{-2}{(z+1)(z+2)} & \dfrac{z}{(z+1)(z+2)} \end{bmatrix} z \right\}$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{2\,z}{(z+1)} - \dfrac{z}{(z+2)} & \dfrac{z}{(z+1)} - \dfrac{z}{(z+2)} \\ \dfrac{-2\,z}{(z+1)} + \dfrac{2\,z}{(z+2)} & \dfrac{-z}{(z+1)} + \dfrac{2\,z}{(z+2)} \end{bmatrix} \right\}$$

Antitrasformando, si ottiene il seguente risultato

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix}$$