Definizione di Sistema Dinamico

Esistono vari tipi di sistemi dinamici: tempo continui, tempo discreti, lineari, non lineari, a variabili concentrate, a variabili distribuite, a stati finiti, ecc. L'elemento principale che caratterizza tutti i sistemi dinamici è l'esistenza di uno spazio degli stati X e uno di spazio delle uscite Y sui quali sono definite le seguenti 2 funzioni:

- *funzione di transizione dello stato*:

  $$x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

  dove $t_0 \in \mathcal{T}$ è l'istante iniziale, $t \in \mathcal{T}$ è l'istante attuale, $x(t_0) \in X$ è lo stato iniziale, $x(t) \in X$ è lo stato attuale, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ è la funzione che definisce la sequenza dei valori di ingresso nell'intervallo $[t_0, t]$.

- *funzione di uscita*:

  $$y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$$

  dove: $t \in \mathcal{T}$ è l'istante attuale, $x(t) \in X$ è lo stato attuale, $u(t) \in U$ è l'ingresso attuale.

Se la funzione di uscita non dipende dall'ingresso $u(\cdot)$:

$$y(t) = \eta(t, x(t))$$

il sistema è strettamente causale (strettamente proprio). Se $\mathcal{T} = \mathcal{R}$, il sistema dinamico è *tempo-continuo* Se $\mathcal{T} = \mathcal{Z}$, il sistema dinamico è *tempo-discreto*.

Proprietà della Funzione di Transizione

La funzione $\psi(\cdot,\,\cdot,\,\cdot,\,\cdot)$ gode delle seguenti proprietà:

- *Consistenza*:

$$x(t) = \psi(t, t, x(t), u(\cdot)) \qquad \forall (t, x(t), u(\cdot)) \in \mathcal{T} \times X \times \mathcal{U}.$$

- *Irreversibilità (orientamento nel tempo)*:

la funzione ψ è definita $\forall t \geq t_0\ , \quad t, t_0 \in \mathcal{T}$.

- *Composizione*:

dati: $x(t_3) = \psi(t_3, t_2, x(t_2), u(\cdot))$, $\ x(t_2) = \psi(t_2, t_1, x(t_1), u(\cdot))$, allora:

$$x(t_3) = \psi(t_3, t_1, x(t_1), u(\cdot)) = \psi(t_3, t_2, \underbrace{\psi(t_2, t_1, x(t_1), u(\cdot))}_{x(t_2)}, u(\cdot)),$$

$$\forall (x,\, u(\cdot)) \in X \times \mathcal{U}, \qquad \forall t_1 < t_2 < t_3$$

- *Causalità*:

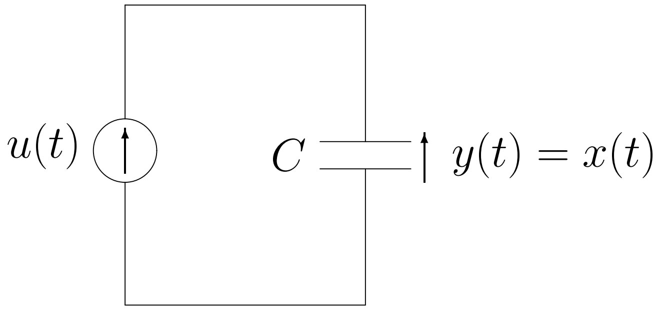
$$u'_{[t_0,t)}(\cdot) = u''_{[t_0,t)}(\cdot) \text{ implica :}$$
$$\psi(t, t_0, x(t_0), u'(\cdot)) = \psi(t, t_0, x(t_0), u''(\cdot))$$
$$\forall (t, x, u(\cdot)) \in \mathcal{T} \times X \times \mathcal{U}.$$

Funzione di risposta *ingresso-uscita*

La composizione della funzione di transizione ψ e di uscita η definisce la *funzione ingresso-uscita* γ:

$$y(t) = \eta(t, \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)), u(t)) = \gamma(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

Esempio: si consideri un sistema dinamico composto da un generatore di corrente $u(t)$ ed un condensatore. La tensione ai capi del condensatore $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$, rappresenta lo stato del sistema.



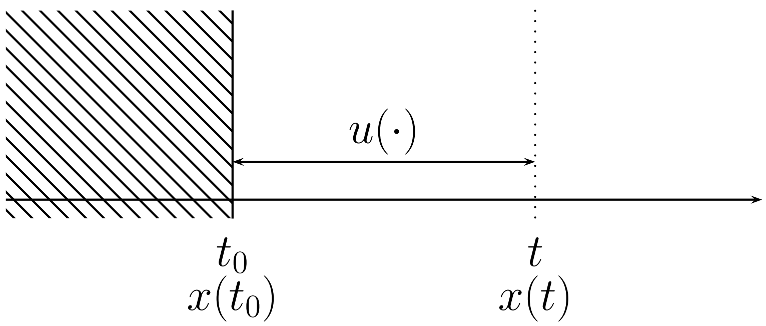
"Storia" dell'ingresso $u(t)$ nell'intervallo $[t_0, t]$: $u(\cdot)$

$$x(t) = x(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

Stato iniziale

Stato attuale

Significato fisico delle variabili di stato. I valori assunti dalle variabili di stato in un generico istante di tempo contengono, nel loro complesso, tutta l'informazione sulla storia passata del sistema necessaria per valutare l'andamento futuro sia delle stesse variabili di stato che di quelle di uscita, una volta noto l'andamento degli ingressi per tempi successivi all'istante considerato.



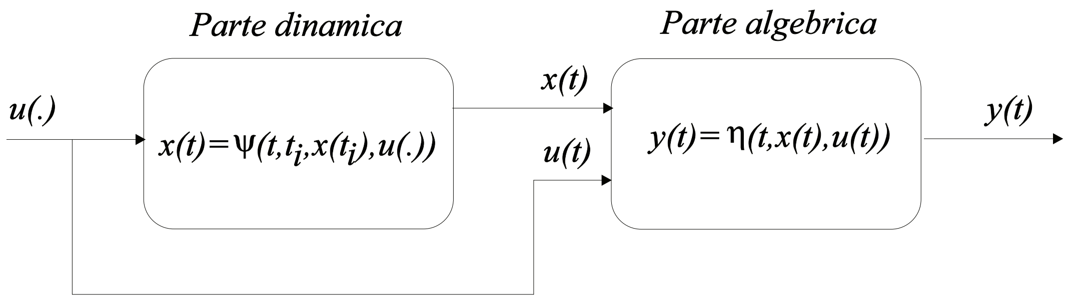
Per determinare lo stato $x(t)$ all'istante t è necessario conoscere lo stato $x(t_0)$ all'istante t_0 e la funzione di ingresso $u(\cdot)$ nell'intervallo di tempo $[t_0,\ t]$.

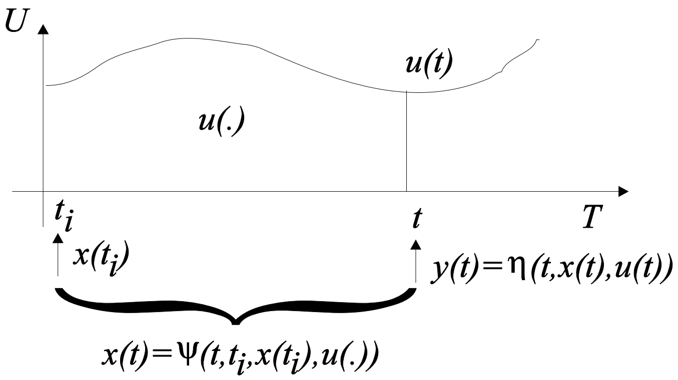
$$x(t) = \psi(t,\ t_0,\ x_0,\ u(\cdot))$$

Il concetto di stato ci permette di non prendere in considerazione tutta la storia passata del sistema prima dell'istante t_0.

Le variabili di stato non sono definite in modo univoco: tipicamente esistono infiniti modi diversi di definire lo "stato" di un sistema;

Proprietà di separazione nello spazio degli stati:





- *Parte dinamica del sistema*. La funzione di transizione permette di riassumere la storia passata del sistema nelle sue *variabili di stato* ad un certo istante t.
- *Parte algebrica del sistema*. La funzione di uscita esprime le *variabili di uscita* secondo grandezze note allo stesso istante t.

Nel caso di un sistema dinamico tempo-continuo *regolare* e a *dimensioni finite*, la funzione di transizione dello stato $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ è soluzione di una equazione differenziale vettoriale del tipo:

$$\dot{x}(t) \triangleq \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

Nel *caso tempo-discreto* la funzione di stato è un'equazione alle differenze:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

Le funzioni $f(x(t), u(t), t)$ e $f(x(k), u(k), k)$, dette *funzioni di stato*, vengono usate per descrivere in modo "implicito" la parte dinamica del sistema.

Rappresentazione vettoriale dei sistemi dinamici

Per rappresentare matematicamente i sistemi dinamici *continui* e *discreti* caratterizzati da m ingressi, n stati e p uscite si utilizzano i seguenti vettori:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t) \in X = \mathcal{R}^n$ è il vettore di stato, $\mathbf{u}(t) \in U = \mathcal{R}^m$ è il vettore degli ingressi e $\mathbf{y}(t) \in Y = \mathcal{R}^p$ è il vettore delle uscite, tutti calcolati all'istante $t \in \mathcal{T} = \mathcal{R}$.

Compattando la notazione, per un sistema tempo-continuo di *dimensione* n con m ingressi ed p uscite scriveremo:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}}$$

Per i sistemi discreti valgono notazioni equivalenti, sostituendo $k \in \mathcal{Z}$ a t.

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \end{cases}}$$

Per i sistemi dinamici continui [discreti], **tempo-invarianti**, la funzione di transizione dello stato $\psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ non dipende dai parametri t e t_0 [k e h] in modo indipendente, ma *è funzione solamente dalla differenza* $t - t_0$ [$k - h$] tra l'istante finale t [k] e l'istante iniziale t_0 [h].

Per questo motivo è sempre possibile semplificare le notazioni facendo coincidere l'istante iniziale t_0 [h] con l'origine dei tempi $t_0 = 0$ [$h = 0$].

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \end{cases}$$

Sistemi dinamici lineari continui

Un sistema dinamico *non-lineare*, *continuo, a dimensione finita e tempo-variante* è sempre descrivibile in forma "implicita" nel modo seguente:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}}$$

Se il sistema dinamico è *lineare tempo-variante*, la *funzione di stato* e la *funzione di uscita* assumono la seguente forma:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases}}$$

Risolvendo questa equazione differenziale matriciale si ottiene la descrizione "esplicita" del sistema dinamico lineare, cioè si determina in modo esplicito la *funzione di transizione dello stato*:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau}$$

dove t_0 è istante iniziale, $\mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)$ rappresenta l'*evoluzione libera*, il termine $\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$ rappresenta l'*evoluzione forzata*, e dove $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ è la *matrice di transizione dello stato* che si ottiene risolvendo la seguente equazione differenziale matriciale:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)}$$

con condizione iniziale: $\mathbf{\Phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$.

Nota: si può dimostrare che la i-esima colonna della matrice $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ coincide con l'evoluzione libera del sistema dinamico a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{e}_i$ coincidente con l'i-esima colonna della matrice identità $\mathbf{I}_n$.

Nel caso di sistema continuo lineare, tempo-invariante, la forma "implicita" del sistema assume la seguente forma:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \end{cases}}$$

In questo caso, la *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ dipende soltanto dalla differenza $t - t_0$, $\mathbf{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{\Phi}(t - t_0)$, per cui senza togliere generalità alla trattazione potremo porre $t_0 = 0$ e scrivere che la *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(t)$ è soluzione della seguente equazione differenziale matriciale:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)}$$

con condizione iniziale $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$. La soluzione di tale equazione è data dalla seguente serie di potenze a coefficienti matriciali:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!} + \ldots \triangleq \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$$

La verifica per sostituzione è immediata se si applica il teorema di derivazione per serie:

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!} + \ldots\right] = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)$$

In modo formale, tale serie *esponenziale* viene indicata con il simbolo $e^{\mathbf{A}t}$, oppure $\exp(\mathbf{A}t)$:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}$$

La *funzione di transizione dello stato* assume quindi la seguente forma:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}$$

Nel caso in cui si scelga $t_0 = 0$ si ha: $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ e quindi si ottiene:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_{0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare continuo tempo-variante

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t)$$

Risolvere il sistema a partire dalla condizione iniziale $x(t_0) = x_0$.

- Nel caso tempo-variante, la matrice di transizione dello stato si determina risolvendo la seguente equazione differenziale omogenea

  $$\dot{\Phi}(t, t_0) = a(t)\Phi(t, t_0)$$

  a partire dalla condizione iniziale $\Phi(t_0, t_0) = 1$. Operando le seguenti trasformazioni

  $$\frac{\dot{\Phi}(t, t_0)}{\Phi(t, t_0)} = a(t) \qquad \rightarrow \qquad \frac{d \ln \Phi(t, t_0)}{dt} = a(t) \qquad \rightarrow$$

  $$\rightarrow \qquad \ln \Phi(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} a(\rho) d\rho$$

  si ricava che

  $$\Phi(t, t_0) = e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} a(\rho) d\rho}$$

  La soluzione dell'equazione differenziale è quindi la seguente:

  $$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\rho)d\rho} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t} a(\rho)d\rho} b(\tau)u(\tau)d\tau$$

- Nel caso in cui si abbia un parametro $a(t)$ costante, $a(t) = a$, la matrice di transizione si semplifica come segue

  $$\Phi(t, t_0) = e^{a(t-t_0)}$$

  per cui la soluzione dell'equazione differenziale diventa

  $$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} b(\tau)u(\tau)\, d\tau$$

- Nel caso di ingresso costante $u(t) = u_0$ e parametro $b(t) = b$ costante, la soluzione si semplifica ulteriormente

  $$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \left(\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\, d\tau \right) b\, u_0$$

  Il termine racchiuso tra parentesi può essere trasformato come segue

  $$\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\, d\tau = \frac{1}{-a} \left[e^{a(t-\tau)} \right]_{t_0}^{t} = \frac{e^{a(t-t_0)} - 1}{a}$$

  per cui, in questo caso, la soluzione del problema diventa

  $$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \frac{e^{a(t-t_0)} - 1}{a} b\, u_0$$

Sistemi dinamici lineari discreti

Un sistema dinamico non-lineare, *discreto, a dimensione finita e* tempo-variante è sempre descrivibile in forma "implicita" nel modo seguente:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \end{cases}}$$

Nel caso di sistema dinamico *"lineare" tempo-variante*, la *funzione di stato* e la *funzione di uscita* assumono la seguente forma:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{cases}}$$

Risolvendo questa equazione alle differenze di tipo matriciale si ottiene la seguente descrizione "esplicita" del sistema dinamico:

$$\boxed{\mathbf{x}(k) = \mathbf{\Phi}(k,h)\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k, j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{u}(j)}$$

dove h è l'istante iniziale, il primo termine $\mathbf{\Phi}(k,h)\mathbf{x}(h)$ rappresenta l'*evoluzione libera*, il secondo termine $\sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k, j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{u}(j)$ rappresenta l'*evoluzione forzata* e dove $\mathbf{\Phi}(k,h)$ è la *matrice di transizione dello stato* così definita:

$$\mathbf{\Phi}(k,h) = \begin{cases} \mathbf{A}(k-1)\ldots\mathbf{A}(h+1)\mathbf{A}(h) & \text{se } k > h \\ \mathbf{I} \text{ (Matrice identità)} & \text{se } k = h \end{cases}$$

Nel caso di sistemi discreti lineari, tempo-invariante, la forma "implicita" del sistema assume la seguente forma:
Per i sistemi discreti, la condizione di tempo-invarianza si traduce nella *non dipendenza* dal tempo delle matrici che descrivono la *funzione di stato* e la *funzione di uscita* del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

In questo caso la *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(k,h)$ si semplifica. Essendo la matrice $\mathbf{A}$ indipendente dal tempo, si ha che, per $k > h$:

$$\mathbf{A}(h) = \mathbf{A}(h+1) = \ldots = \mathbf{A}(k-1) = \mathbf{A}$$

e quindi la matrice $\mathbf{\Phi}(k,h)$ risulta funzione della sola differenza $k-h$:

$$\boxed{\mathbf{\Phi}(k,h) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2)\ldots\mathbf{A}(h) = \mathbf{A}^{k-h}}$$

Posto $h=0$, la *funzione di transizione dello stato* diventa quindi:

$$\boxed{\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)}$$

L'evoluzione forzata può anche essere scritta nella seguente forma matriciale:

$$\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j) = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \ldots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(k-1)\\ \mathbf{u}(k-2)\\ \mathbf{u}(k-3)\\ \vdots \\ \mathbf{u}(0)\end{bmatrix}$$

Esempio. Sia dato il seguente sistema lineare discreto tempo-variante

$$x(k+1) = \left(\alpha + \frac{\beta}{k}\right)x(k) + b(k)u(k)$$

definito per $k \geq 1$. Determinare la funzione di transizione dello stato del sistema a partire dalla condizione iniziale $x(1) = x_1$.

- Nel caso generale tempo-variante, la matrice di transizione dello stato vale

$$\Phi(k,h) = \begin{cases} (\alpha + \frac{\beta}{k-1})(\alpha + \frac{\beta}{k-2})\ldots(\alpha + \frac{\beta}{h}) & \text{per } \; k > h \\ 1 & \text{per } \; k = h \end{cases}$$

  La soluzione dell'equazione alle differenze è quindi la seguente:

$$x(k) = \Phi(k,1)x_1 + \sum_{i=1}^{k-1}\Phi(k,i+1)b(i)u(i)$$

- Nel caso invece in cui si abbia $\beta = 0$, la matrice di transizione si semplifica

$$\Phi(k,h) = \alpha^{k-h}$$

  per cui la soluzione dell'equazione alle differenze diventa

$$x(k) = \alpha^{k-1}x_1 + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha^{k-i-1}b(i)u(i)$$

- Se poi si considera il caso di ingresso costante $u(k) = u_0$ $(k \geq 1)$ e parametro $b(k) = b$ costante, allora la soluzione si semplifica ulteriormente

$$x(k) = \alpha^{k-1}x_1 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{k-i-1}\right) b\, u_0$$

  Il termine racchiuso tra parentesi può essere trasformato come segue

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{k-i-1} = \sum_{i=0}^{k-2} \alpha^i = \frac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}$$

  per cui la soluzione diventa

$$x(k) = \alpha^{k-1}x_1 + \frac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha} b\, u_0$$

Nel caso lineare tempo-invariante

$$x(k+1) = \alpha\, x(k) + b\, u(k)$$

la risposta al gradino del sistema può essere calcolata anche utilizzando la tecnica delle $\mathcal{Z}$-trasformate:

$$z[X(z) - x(1)] = \alpha X(z) + b\, U(z)$$

Posto $x(1) = x_1$ e isolando $X(z)$ si ottiene:

$$X(z) = \frac{z}{z-\alpha} x_1 + \frac{b}{z-\alpha} U(z)$$

Nel caso di gradino unitario in ingresso

$$U(z) = \frac{u_0 z}{z-1}$$

si ha che

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{z-\alpha} x_1 + \frac{b\, u_0 z}{(z-\alpha)(z-1)} \\ &= \frac{z}{z-\alpha} x_1 + \frac{b\, u_0 z}{(1-\alpha)} \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-\alpha}\right] \end{aligned}$$

Antitrasformando e traslando di un periodo di campionamento si ottiene:

$$x(k) = \alpha^{k-1}x_1 + b\, u_0 \frac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}$$