Ulteriori test di raggiungibilità

Oltre alla relazione $\text{rango}\mathcal{R}^+ = n$, esistono altri criteri che possono essere utilizzati per verificare la raggiungibilità o meno di un sistema dinamico.

- *Proprietà. (PBH test) Il sistema* $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ *è raggiungibile se e solo se la matrice*
$$\left[\, s\mathbf{I} - \mathbf{A} \,\middle|\, \mathbf{B} \,\right]$$
ha rango pieno per ogni $s \in \mathcal{C}$.

- *Proprietà. (Struttura di Jordan dei sistemi raggiungibili) Sia dato il sistema* $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ *con* $\mathbf{A}$ *in forma canonica di Jordan e* $\mathbf{B}$ *partizionata in modo conforme ai miniblocchi di Jordan. Il sistema è raggiungibile se e solo se per ciascun autovalore distinto* λ_i *di* $\mathbf{A}$*, le ultime righe dei blocchi di* $\mathbf{B}$ *corrispondenti ai miniblocchi di Jordan sono linearmente indipendenti fra loro.*

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \times & \times & \times \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times \end{array}\right]$$

Il sistema è raggiungibile se e solo se le righe di $\mathbf{B}$ indicate con crocette $(\times)$ sono linearmente indipendenti fra di loro.

Il numero minimo di ingressi che il sistema deve avere per poter essere raggiungibile è pari al numero massimo di miniblocchi associati allo stesso autovalore.

- Caratterizzazione "geometrica" dello spazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$:

  $\mathcal{X}^+$ è il più piccolo sottospazio $\mathbf{A}$-invariante contenente $\text{Im}\mathbf{B}$.

Esempio. Per i sistemi diagonalizzabili con un solo ingresso, la condizione di raggiungibilità può essere espressa in modo molto semplice.

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(k)$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1^2 b_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ b_2 & \lambda_2 b_2 & \lambda_2^2 b_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \lambda_n^2 b_n & \dots & \lambda_n^{n-1} b_n \end{bmatrix}$$

che può essere riscritta nel modo seguente:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Quindi, il sistema risulta essere completamente raggiungibile se e solo se:

1) Tutti gli elementi b_i $(i = 1, \dots, n)$ sono non nulli;

2) Tutti gli autovalori sono distinti;

Cioè il vettore $\mathbf{b}$ deve avere una componente non nulla lungo tutti gli autovettori del sistema.