

Struttura duale dei sistemi dinamici lineari

È possibile dimostrare che le formule relative ai problemi di osservabilità e ricostruibilità possono essere ricavate per “dualità” dalle analoghe formule viste per i problemi di raggiungibilità e controllabilità.

Le sostituzioni che si debbono operare per passare da un sistema a quello duale sono le seguenti:

$\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}_D$
$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}_D^T$
$\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C}_D^T$
$\mathbf{C} \leftrightarrow \mathbf{B}_D^T$
$\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{D}_D^T$
$\mathbf{T} \leftrightarrow (\mathbf{P}^{-1})^T$

$\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}_D$
$\mathcal{R}^+ \leftrightarrow (\mathcal{O}_D^-)^T$
$\mathcal{O}^- \leftrightarrow (\mathcal{R}_D^+)^T$
$\mathcal{X}^+ \leftrightarrow \mathcal{E}_D^-$
$\mathcal{E}^- \leftrightarrow \mathcal{X}_D^+$

Vediamo alcune delle corrispondenze più evidenti.

<p><u>Matrice di raggiungibilità:</u></p> $\mathcal{R}^+ = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$	<p><u>Matrice di osservabilità:</u></p> $\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$
---	--

<p><u>Sottospazio di raggiungibilità \mathcal{X}^+:</u> è il più piccolo sottospazio invariante di \mathbf{A} contenente $\text{Im}\mathbf{B}$.</p>	<p><u>Sottospazio di non osservabilità \mathcal{E}^-:</u> è il più grande sottospazio invariante di \mathbf{A} contenuto nel $\text{ker}\mathbf{C}$.</p>
--	---

<p>Matrice \mathbf{T} per trasformare, $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$, il sistema \mathcal{S} completamente raggiungibile nel sistema $\bar{\mathcal{S}}$:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\bar{\mathcal{R}}^+)^{-1}$ 2) $\mathbf{T} = \mathcal{R}^+\bar{\mathcal{R}}^{+T}(\bar{\mathcal{R}}^+\bar{\mathcal{R}}^{+T})^{-1}$ <p>dove \mathcal{R}^+ ed $\bar{\mathcal{R}}^+$ sono le matrici di raggiungibilità dei sistemi \mathcal{S} ed $\bar{\mathcal{S}}$. La relazione (1) è valida per sistemi ad un solo ingresso; la relazione (2) è valida anche per sistemi a più ingressi.</p>	<p>Matrice \mathbf{P}^{-1} per trasformare, $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$, il sistema \mathcal{S} completamente osservabile nel sistema $\bar{\mathcal{S}}$:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $\mathbf{P}^{-1} = (\bar{\mathcal{O}}^-)^{-1}\mathcal{O}^-$ 2) $\mathbf{P}^{-1} = (\bar{\mathcal{O}}^{-T}\bar{\mathcal{O}}^-)^{-1}\bar{\mathcal{O}}^{-T}\mathcal{O}^-$ <p>dove \mathcal{O}^- e $\bar{\mathcal{O}}^-$ sono le matrici di osservabilità dei sistemi \mathcal{S} e $\bar{\mathcal{S}}$. La relazione (1) è valida per sistemi ad una sola uscita; la relazione (2) è valida anche per sistemi a più uscite.</p>
---	---

<p><u>Forma standard di raggiungibilità:</u></p> $\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2]$	<p><u>Forma standard di osservabilità:</u></p> $\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{12} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}$ $\bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0]$
---	--

<p><u>Sottosistema raggiungibile:</u></p> $\mathcal{S}_R = (\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{C}}_1)$	<p><u>Sottosistema osservabile:</u></p> $\mathcal{S}_O = (\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{C}}_1)$
---	---

<p><u>Sottosistema non raggiungibile:</u></p> $\mathcal{S}_{NR} = (\bar{\mathbf{A}}_{22}, 0, \bar{\mathbf{C}}_2)$	<p><u>Sottosistema non osservabile:</u></p> $\mathcal{S}_{NO} = (\bar{\mathbf{A}}_{22}, \bar{\mathbf{B}}_2, 0)$
---	---

<p>Matrice di trasformazione \mathbf{T} per portare il sistema in forma standard di raggiungibilità:</p> $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{T} = [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2]$ <p>dove</p> $\text{Im}\mathbf{T}_1 = \text{Im}\mathcal{R}^+ = \mathcal{X}^+$ <p>e \mathbf{T}_2 rende non singolare la matrice \mathbf{T}.</p>	<p>Matrice di trasformazione \mathbf{P}^{-1} per portare il sistema in forma standard di osservabilità:</p> $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}$ <p>dove</p> $\text{Im}\mathbf{P}_1^T = \text{Im}(\mathcal{O}^-)^T$ <p>e \mathbf{P}_2 rende non singolare la matrice \mathbf{P}^{-1}.</p>
---	---

<p><u>Matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$:</u></p> $\mathbf{H}(s) = \bar{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_1$ <p>è funzione della sola parte <i>raggiungibile</i> del sistema.</p>	<p><u>Matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$:</u></p> $\mathbf{H}(s) = \bar{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_1$ <p>è funzione della sola parte <i>osservabile</i> del sistema.</p>
--	--

Forma canonica di raggiungibilità (valida per sistemi raggiungibili ad un solo ingresso):

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \\ \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

e dove i parametri $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$, sono i coefficienti del polinomio caratteristico *monico* della matrice \mathbf{A} : $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1} + \dots + \alpha_0$

Forma canonica di osservabilità (valida per sistemi osservabili ad una sola uscita):

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_c = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

e dove i parametri $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$, sono i coefficienti del polinomio caratteristico *monico* della matrice \mathbf{A} : $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1} + \dots + \alpha_0$

Matrice di trasformazione \mathbf{T}_c per portare il sistema \mathcal{S} in forma canonica di raggiungibilità \mathcal{S}_c ($\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \mathbf{x}_c$):

$$\mathbf{T}_c = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1} = [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di trasformazione \mathbf{P}_c^{-1} per portare il sistema \mathcal{S} in forma canonica di osservabilità \mathcal{S}_c ($\mathbf{x} = \mathbf{P}_c \mathbf{x}_c$):

$$\mathbf{P}_c^{-1} = (\mathcal{O}_c^-)^{-1} \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Si noti che vale la relazione:

$$(\mathcal{R}_c^+)^{-1} = ((\mathcal{O}_c^-)^{-1})^T = (\mathcal{O}_c^-)^{-1}$$

Siano α_i i coefficienti del polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$ della matrice \mathbf{A} :

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

e siano d_i i coefficienti di un polinomio monico arbitrario $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_1\lambda + d_0$$

Se la coppia di matrici (\mathbf{A}, \mathbf{b}) è raggiungibile, il vettore dei guadagni \mathbf{k} di una retroazione statica dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{k} \mathbf{x}$ che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}$ è il seguente:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_c \mathbf{T}_c^{-1} = \mathbf{k}_c \left\{ \left[\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

dove $\mathbf{k}_c = \left[\alpha_0 - d_0, \alpha_1 - d_1, \dots, \alpha_{n-1} - d_{n-1} \right]$.

Se la coppia di matrici (\mathbf{A}, \mathbf{c}) è osservabile, il vettore dei guadagni \mathbf{l} di un osservatore asintotico dello stato che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}$ è il seguente:

$$\mathbf{l} = \mathbf{P}_c \mathbf{l}_c = \left\{ \left[\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^2 \\ \dots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1} \end{array} \right] \right\}^{-1} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \alpha_0 - d_0 \\ \alpha_1 - d_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - d_{n-1} \end{array} \right]}_{\mathbf{l}_c}$$

Se la coppia di matrici (\mathbf{A}, \mathbf{b}) è raggiungibile, il vettore dei guadagni \mathbf{k} di una retroazione statica dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{k}\mathbf{x}$ che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}$ si calcola utilizzando la seguente formula di Ackerman:

$$\mathbf{k} = - \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right]}_{\mathbf{q}^T} (\mathcal{R}^+)^{-1} p(\mathbf{A}) = -\mathbf{q}^T p(\mathbf{A})$$

dove \mathbf{q}^T è l'ultima riga dell'inversa della matrice di raggiungibilità e dove $p(\mathbf{A})$ è la matrice che si ottiene dal polinomio arbitrario $p(\lambda)$ sostituendo in esso la matrice \mathbf{A} al posto del parametro λ .

Se la coppia di matrici (\mathbf{A}, \mathbf{c}) è osservabile, il vettore dei guadagni \mathbf{l} di un osservatore asintotico dello stato che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}$ si calcola utilizzando la seguente formula di Ackerman:

$$\mathbf{l} = -p(\mathbf{A}) \underbrace{(\mathcal{O}^-)^{-1} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]}_{\mathbf{q}} = -p(\mathbf{A})\mathbf{q}$$

dove \mathbf{q} è l'ultima colonna dell'inversa della matrice di osservabilità e dove $p(\mathbf{A})$ è la matrice che si ottiene dal polinomio arbitrario $p(\lambda)$ sostituendo in esso la matrice \mathbf{A} al posto del parametro λ .

Scomposizione canonica di Kalman:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{13} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0]$$

Sottosistema raggiungibile:

$$\bar{\mathbf{A}}_R = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}_R = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_R = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0]$$

Sottosistema osservabile:

$$\bar{\mathbf{A}}_O = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{13} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{33} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}_O = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_O = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_3]$$

Sottosistema non raggiungibile:

$$\bar{\mathbf{A}}_{NR} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}_{NR} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{NR} = [\bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0]$$

Sottosistema non osservabile:

$$\bar{\mathbf{A}}_{NO} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}}_{NO} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{NO} = [0 \quad 0]$$