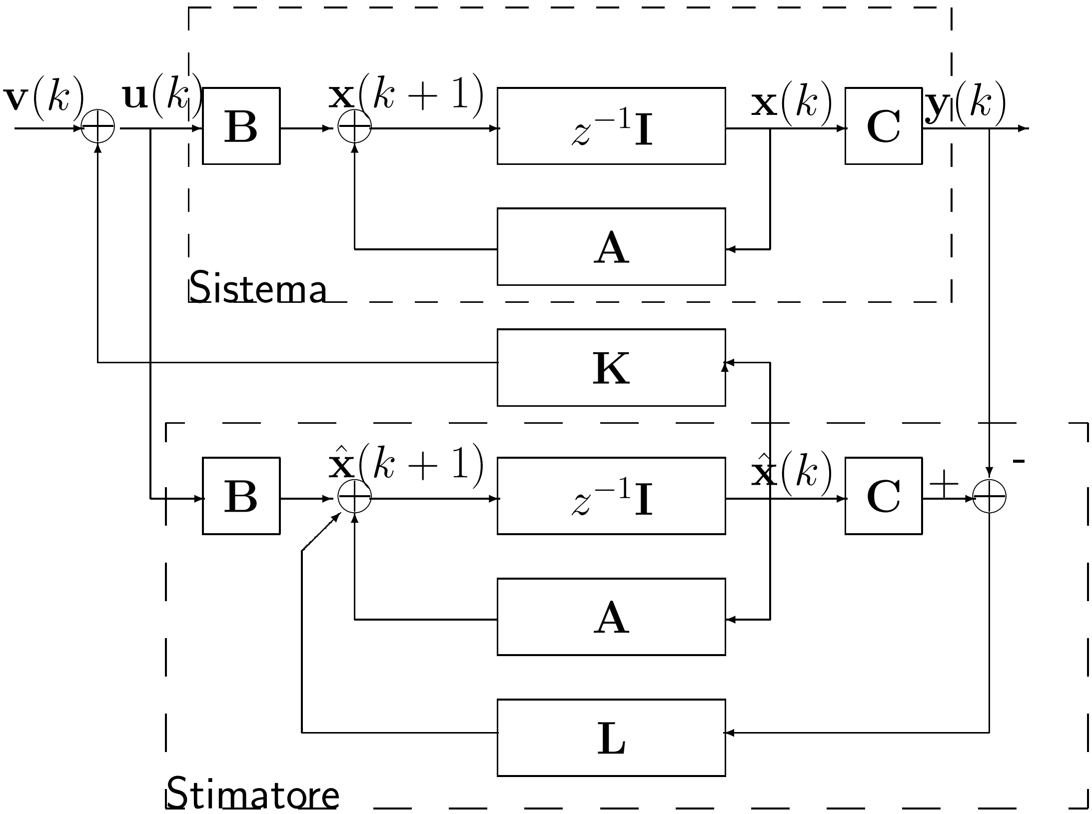
Sintesi del regolatore

- Si definisce *regolatore* il sistema composto dalla serie dello stimatore dello stato e dall'elemento statico di retroazione $\mathbf{K}$:



- Equazioni del sistema globale:

$$\text{Sistema:} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

$$\text{Retroazione:} \quad \mathbf{u}(k) = \mathbf{v}(k) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\text{Stimatore:} \quad \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}[\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{y}(k)]$$

- Eliminando $\mathbf{u}(k)$ si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k) \\ \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

- Il sistema $(\overline{\mathbf{A}},\ \overline{\mathbf{B}},\ \overline{\mathbf{C}})$ ottenuto è di dimensione $2n$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BK} \\ -\mathbf{LC} & \mathbf{A}+\mathbf{LC}+\mathbf{BK} \end{bmatrix}}^{\overline{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}}^{\overline{\mathbf{B}}} \mathbf{v}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}}^{\overline{\mathbf{C}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}$$

- Allo scopo di evidenziare alcune proprietà strutturali del sistema, si utilizza la seguente trasformazione di coordinate:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}$$

- La seconda parte del vettore $\overline{\mathbf{x}}$ coincide con l'errore di stima $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$:

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

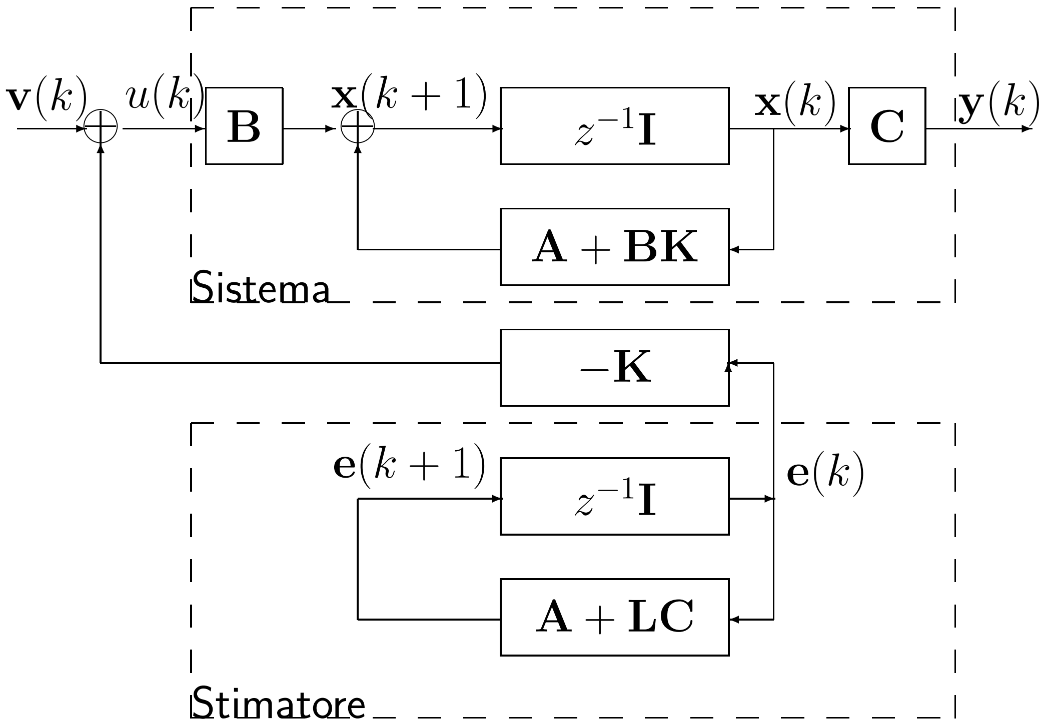
- Le nuove equazioni del sistema ($\mathcal{A} = \mathbf{T}^{-1}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T}$, $\mathcal{B} = \mathbf{T}^{-1}\overline{\mathbf{B}}$ e $\mathcal{C} = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{T}$):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A}+\mathbf{LC} \end{bmatrix}}^{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathcal{B}} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Il sistema si trova in forma standard di raggiungibilità e i suoi autovalori sono l'unione degli autovalori delle due matrici $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ e $\mathbf{A}+\mathbf{LC}$.

- *Proprietà di separazione*. I seguenti due blocchi:
  1) *retroazione statica dello stato*, cioè l'allocazione degli autovalori del sistema $(\mathbf{A}+\mathbf{BK})$;
  2) *stimatore asintotico dello stato*, cioè l'allocazione degli autovalori del sistema $(\mathbf{A}+\mathbf{LC})$,
  possono essere progettati in modo indipendente.

- Una rappresentazione grafica del sistema trasformato è la seguente:



- La parte del sistema relativa alla stima dello stato è un sistema autonomo la cui uscita libera $\mathbf{e}(k)$ (l'errore di stima) agisce come ulteriore ingresso per la parte raggiungibile del sistema dinamico.

- La presenza dello stimatore non altera la relazione *ingresso–uscita* del sistema considerato. Infatti la matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ dell'intero sistema rimane la stessa sia retroazionando lo stato $\mathbf{x}$, che retroazionando la "stima dello stato $\hat{\mathbf{x}}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}(z) &= \overline{\mathbf{C}}(z\mathbf{I}-\overline{\mathbf{A}})^{-1}\overline{\mathbf{B}} = \mathcal{C}(z\mathbf{I}-\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} \\
&= \left[\begin{array}{cc} \mathbf{C} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} [z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1} & ****** \\ 0 & [z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{LC})]^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{B} \\ 0 \end{array}\right] \\
&= \mathbf{C}[z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{B}
\end{aligned}
$$