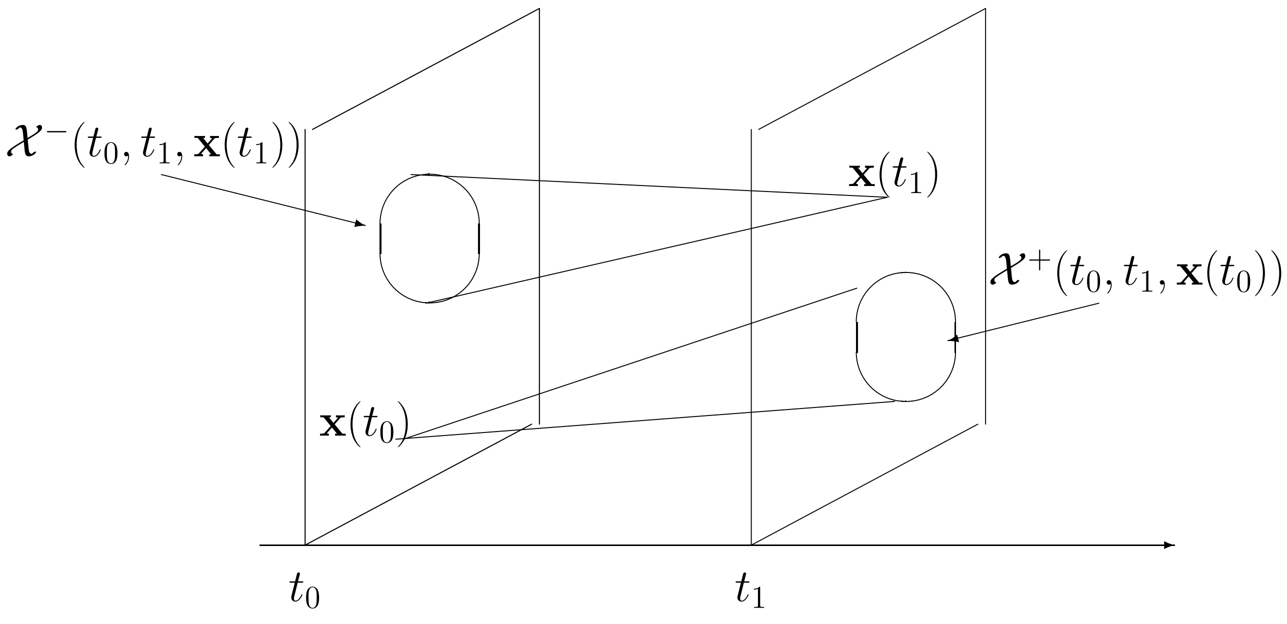
Raggiungibilità e controllabilità

- *Raggiungibilità*.
  Il problema della raggiungibilità consiste nel determinare l'insieme di *stati raggiungibili da un determinato stato iniziale*:
  - Uno stato $\mathbf{x}(t_1)$ di un sistema dinamico è raggiungibile dallo stato $\mathbf{x}(t_0)$ nell'intervallo temporale $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $\mathbf{x}(t_1) = \psi(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(\cdot))$.
  - Indicheremo con $\mathcal{X}^+(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0))$ l'*insieme degli stati raggiungibili* dall'evento $\{t_0, \mathbf{x}(t_0)\}$ all'istante t_1.

- *Controllabilità*.
  Il problema della controllabilità consiste nel determinare l'insieme di stati controllabili a un determinato *stato finale*:
  - Uno stato $\mathbf{x}(t_0)$ di un sistema dinamico è controllabile allo stato $\mathbf{x}(t_1)$ nell'intervallo temporale $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $\mathbf{x}(t_1) = \psi(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(\cdot))$.
  - Indicheremo con $\mathcal{X}^-(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_1))$ l'*insieme degli stati controllabili* all'evento $\{t_1, \mathbf{x}(t_1)\}$ dall'istante t_0.



Sistemi lineari invarianti discreti

Consideriamo il seguente sistema lineare, stazionario e discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

Raggiungibilità:

- L'insieme $\mathcal{X}^+(k)$ degli stati *raggiungibili dall'origine in k* passi coincide con l'insieme degli stati $\mathbf{x}(k)$ che si ottengono dall'evoluzione forzata del sistema

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j) = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

quando gli ingressi $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$ vengono fatti variare in tutti i modi possibili.

- Indichiamo con

$$\boxed{\mathcal{R}^+(k) \triangleq [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]}$$

la *matrice di raggiungibilità in k passi*.

- L'insieme $\mathcal{X}^+(k)$ degli stati *raggiungibili dall'origine in k passi* è uno spazio vettoriale che coincide con l'immagine della matrice $\mathcal{R}^+(k)$:

$$\boxed{\mathcal{X}^+(k) = \mathrm{Im}[\mathcal{R}^+(k)]}$$

- I sottospazi $\mathcal{X}^+(k)$ raggiungibili in $1, 2, \ldots, k$ passi soddisfano la seguente catena di inclusioni (n è la dimensione dello spazio degli stati):

$$\mathcal{X}^+(1) \subseteq \mathcal{X}^+(2) \subseteq \ldots\ldots \subseteq \mathcal{X}^+(n) = \mathcal{X}^+(n+1) = \ldots$$

quindi uno stato, se è raggiungibile, lo è al più in n passi.

- Indichiamo con $\mathcal{R}^+$ la *matrice di raggiungibilità* del sistema:

$$\boxed{\mathcal{R}^+ \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{R}^+(n) = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]}$$

- Il sottospazio $\mathcal{X}^+$ degli stati *raggiungibili* dall'origine in un'intervallo di tempo qualsiasi è dato dall'immagine della matrice $\mathcal{R}^+$:

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+$$

- *Definizione*. Un sistema è *completamente raggiungibile* se il sottospazio $\mathcal{X}^+$ degli stati raggiungibili dall'origine coincide con l'intero spazio degli stati $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{X}^+ = \mathbf{X}$$

- Condizione *necessaria e sufficiente* affinchè un sistema sia raggiungibile è:

$$\boxed{rango(\mathcal{R}^+) = n}$$

Controllabilità:

- Uno stato $\mathbf{x}(0)$ è *controllabile a zero in k passi* se esiste una successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$ che porta il sistema dallo stato $\mathbf{x}(0)$ allo stato $\mathbf{x}(k) = 0$ nell'intervallo di tempo $[0, k]$:

$$0 = \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{Bu}(j)$$

ovvero se

$$-\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{Bu}(j)$$

- Uno stato $\mathbf{x}(0)$ è *controllabile a zero in k passi* se:

$$\boxed{\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(k)}$$

cioè se lo stato "$-\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$" è raggiungibile dall'origine in k passi.

- *Notazione*. Indichiamo con $\mathcal{X}^-$ il *sottospazio degli stati controllabili a zero*:

$$\mathcal{X}^- = \{\mathbf{x} : \exists k \, : \; \mathbf{A}^k\mathbf{x} \in \mathcal{X}^+(k)\}$$

- *Definizione*. Un sistema è *controllabile* se l'insieme $\mathcal{X}^-$ coincide con l'intero spazio degli stati $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{X}^- = \mathbf{X}$$

- *Proprietà*. Un sistema è controllabile *se e solo se* vale la seguente relazione:

$$\boxed{\mathrm{Im}\mathbf{A}^n \subseteq \mathcal{X}^+(n) = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+}$$

dove $\mathcal{R}^+$ rappresenta la matrice di raggiungibilità del sistema.

- In generale, per i sistemi discreti le proprietà di raggiungibilità e controllabilità **non** sono equivalenti:

  1) La raggiungibilità implica la controllabilità.

  $$\boxed{\text{raggiungibilità} \implies \text{controllabilità}}$$

  Infatti l'ipotesi di raggiungibilità implica $\mathcal{X}^+ = \mathbf{X}$ dalla quale segue che: $\mathrm{Im}\mathbf{A}^n \subseteq \mathcal{X}^+ = \mathbf{X}$, cioè il sistema è sicuramente controllabile.

  2) La controllabilità non implica la raggiungibilità:

  $$\boxed{\text{controllabilità} \;\not\Longrightarrow\; \text{raggiungibilità}}$$

  Infatti, se per esempio $\mathbf{A} = 0$ e $rango(\mathbf{B}) < n$, allora:

  $$rango([\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]) = rango([\mathbf{B}\ 0\ \ldots\ 0] < n$$

  cioè il sistema non è raggiungibile pur essendo controllabile.

- Se la matrice $\mathbf{A}$ è a rango pieno, la raggiungibilità e la controllabilità si implicano a vicenda.

<u>*Nota*</u>. La differenza sostanziale tra la raggiungibilità e la controllabilità consiste nel fatto che *uno stato* $\mathbf{x}$ *puó essere controllato a zero anche senza applicare ingressi*: questo può accadere grazie solo se la matrice $\mathbf{A}$ non è a rango pieno, cioè se ha almeno un autovalore nullo. In questo caso il corrispondente "autospazio" tende a zero in un numero finito di passi senza applicare ingressi.

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

Esempio. Consideriamo il sistema discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Il sistema non è completamente raggiungibile:

$$\mathcal{X}^+(1) = \mathrm{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}^+(2) = \mathcal{X}^+(3) = \ldots = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

La parte raggiungibile del sistema viene raggiunta in 2 passi: $\mathcal{X}^+ = \mathcal{X}^+(2)$.

Il sistema non è controllabile in un passo:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \not\subset \mathrm{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{X}^+(1)$$

ma è controllabile in due passi:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^2 = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

I sottospazi controllabili $\mathcal{X}^-(1)$ e $\mathcal{X}^-(2)$ sono i seguenti:

$$\mathcal{X}^-(1) = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{X}^-(2) = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>*Nota*</u>: i due sottospazi $\mathcal{X}^+(1)$ e $\mathcal{X}^-(1)$ non coincidono.

Sistemi lineari, invarianti, tempo-continui

Consideriamo il seguente sistema lineare, invarianti e tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Raggiungibilità:

- Uno stato $\mathbf{x}(t)$ è *raggiungibile all'istante t a partire dallo stato zero* se esiste un ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ tale che:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

- *Notazioni*: 1) Sia $\mathcal{X}^+(t)$ l'insieme degli stati raggiungibili dallo stato $\mathbf{x}(0) = 0$ nell'intervallo di tempo $[0,\ t]$; 2) Sia $\mathcal{X}^+$ l'insieme degli stati raggiungibili dallo stato $\mathbf{x}(0) = 0$ nell'intervallo di tempo $[0,\ \infty]$.

- Indichiamo con R_t l'operatore lineare $R_t : \mathcal{U} \rightarrow X$ così definito:

$$R_t : \mathbf{u}(\cdot) \rightarrow \mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

- L'insieme $\mathcal{U}$ è infinito dimensionale. Gli stati $\mathbf{x}(t)$ raggiungibili al tempo t sono tutti e soli quelli che appartengono all'*immagine* di R_t:

$$\mathcal{X}^+(t) = \{\mathbf{x}\ :\ \mathbf{x} \in \mathrm{Im}R_t\}$$

- L'insieme $\mathcal{X}^+(t)$, essendo l'immagine di un operatore lineare, *è un sottospazio vettoriale* dello spazio degli stati $\mathbf{X}$.

- *Proprietà*. Per qualsiasi $t > 0$, il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+(t)$ è l'immagine della matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$:

$$\boxed{\mathcal{X}^+(t) = \mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+}$$

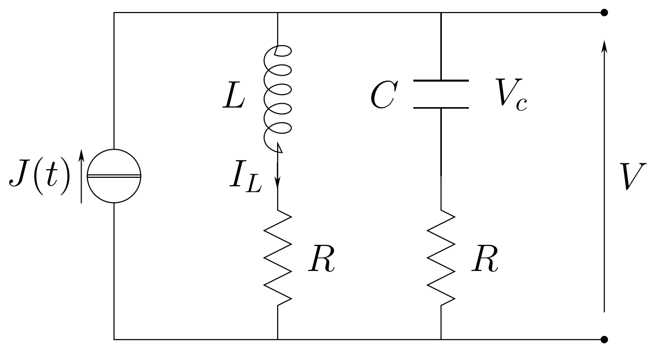
- A differenza di quanto accade per i sistemi discreti, il sottospazio raggiungibile *non dipende dalla lunghezza dell'intervallo $[0, t]$*

- Ovviamente, al diminuire della lunghezza dell'intervallo $[0, t]$, l'ampiezza dell'azione di controllo $\mathbf{u}(t)$ diventa via via sempre più grande.

Controllabilità:

- *Proprietà. Per sistemi lineari, invarianti tempo continui, il sottospazio controllabile $\mathcal{X}^-$ non dipende dall'intervallo in cui agisce il controllo e coincide con il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$.*

Esempio. Si consideri la seguente rete elettrica:



Le equazioni dinamiche del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} L\dfrac{d\,I_L}{dt} & = & V_C + R(J - I_L) - R\,I_L \\ C\dfrac{d\,V_C}{dt} & = & J - I_L \\ V & = & V_C + R(J - I_L) \end{cases}$$

dove I_L è la corrente che scorre nell'induttanza, V_C la tensione ai capi del condensatore, J la corrente in ingresso e V la tensione di uscita. In forma matriciale, la dinamica del sistema è:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} & = & \begin{bmatrix} \frac{-2R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} J \\ V & = & \begin{bmatrix} -R & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + [\,R\,]J \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & \frac{1}{LC} - \frac{2R^2}{L^2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{LC} \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{R}^+ = \frac{1}{LC}\left[\frac{R^2}{L} - \frac{1}{C}\right]$$

Il sistema è raggiungibile solo se $\mathcal{R}^+$ ha rango pieno. Il sistema non è completamente raggiungibile se

$$R^2 = \frac{L}{C} \qquad \leftrightarrow \qquad R\,C = \frac{L}{R}$$

cioè se la costante di tempo dell'induttanza è uguale a quella della capacità, cioè quando i due autovalori del sistema coincidono: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Sistemi equivalenti

- *Proprietà*. Sistemi (discreti o continui) *algebricamente equivalenti* hanno le stesse proprietà di raggiungibilità.

- Sia $\mathbf{T}$ la matrice di trasformazione (non–singolare) che rende algebricamente equivalenti i due sistemi lineari invarianti $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$ ed $\bar{\mathcal{S}} = (\overline{\mathbf{A}},\ \overline{\mathbf{B}},\ \overline{\mathbf{C}},\ \overline{\mathbf{D}})$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, & \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, & \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \end{cases}$$

  I sottospazi raggiungibili in k passi dei due sistemi $\mathcal{S}$ ed $\bar{\mathcal{S}}$ sono legati tra loro dalla seguente relazione:

$$\overline{\mathcal{X}}^+(k) = \mathrm{Im}[\overline{\mathbf{B}} \ldots \overline{\mathbf{A}}^{k-1}\overline{\mathbf{B}}] = \mathrm{Im}(\mathbf{T}^{-1}[\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]) = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{X}^+(k)$$

- Il sottospazio $\mathcal{X}^+$ è invariante rispetto ai cambiamenti di base nello spazio degli stati:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathcal{X}^+ = \mathbf{T}\overline{\mathcal{X}}^+}$$

- Siano $\mathcal{R}^+$ e $\overline{\mathcal{R}}^+$ le *matrici di raggiungibilità* dei due sistemi. Per $k = n$ vale la relazione:

$$\boxed{\overline{\mathcal{R}}^+ = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}^+} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\mathcal{R}^+ = \mathbf{T}\,\overline{\mathcal{R}}^+}$$

- Nel caso di sistemi raggiungibili questa relazione consente di calcolare la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}\,\overline{\mathcal{R}}^+\overline{\mathcal{R}}^{+^T} = \mathcal{R}^+\overline{\mathcal{R}}^{+^T} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{T} = \mathcal{R}^+\overline{\mathcal{R}}^{+^T}(\overline{\mathcal{R}}^+\overline{\mathcal{R}}^{+^T})^{-1}}$$

- Se i sistemi hanno un solo ingresso, $\mathcal{R}^+$ e $\overline{\mathcal{R}}^+$ sono quadrate e non singolari, per cui vale la semplice relazione:

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\overline{\mathcal{R}}^+)^{-1}}$$