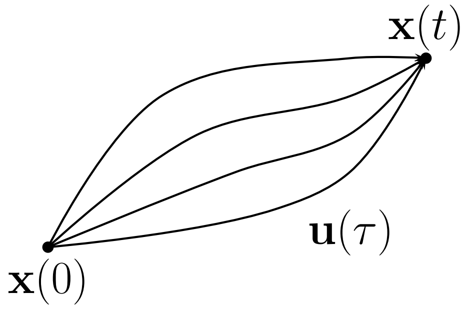
Controllo di sistemi continui

- *Problema di controllo: Dati $\mathbf{x}(0)$ e $\mathbf{x}(t)$, determinare la funzione di ingresso $\mathbf{u}(\tau)$, con $\tau \in [0,\ t]$, che consenta di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(t)$ nell'intervallo di tempo $[0,\ t]$.*



- Per risolvere il problema occorre risolvere la seguente equazione:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\, d\tau$$

  nell'incognita $\mathbf{u}(\tau)$ per $\tau \in [0,\ t]$. Tipicamente esistono infinite soluzioni diverse.

- Il problema di controllo ha soluzione se e solo se:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+}$$

  cioè se il vettore $\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$ è raggiungibile.

- La soluzione particolare $\bar{\mathbf{u}}(\tau)$ che minimizza la norma quadratica $||\mathbf{u}(\tau)|| = \sqrt{\int_0^t \mathbf{u}(\tau)^T\mathbf{u}(\tau)\, d\tau}$ è la seguente:

$$\boxed{\bar{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)}(W_t)^{-1}[\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)]}$$

  dove con W_t si è indicato il *gramiano di raggiungibilità*:

$$\boxed{W_t = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)} d\tau}$$

- Prova. Gli stati che possono essere raggiunti all'istante t a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$, sono quelli appartenenti all'insieme:

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathcal{X}^+$$

Se il problema ammette soluzione, questa si determina risolvendo la seguente equazione vettoriale nell'incognita $\mathbf{u}(\cdot)$:

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = R_t\,\mathbf{u}(\cdot)$$

dove con R_t si indica l'operatore lineare $R_t\,:\,\mathbf{u}(\tau) \to \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\tau)d\tau$ per $\tau \in [0,\;t]$. La soluzione generale del problema è la seguente:

$$\mathbf{u}(\tau) = \bar{\mathbf{u}}(\tau) + \bar{\mathbf{v}}(\tau)$$

dove $\bar{\mathbf{u}}(\tau)$ è una soluzione particolare e $\bar{\mathbf{v}}(\tau)$ è la soluzione generale del problema omogeneo associato:

$$0 = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,\bar{\mathbf{v}}(\tau)d\tau \qquad \leftrightarrow \qquad 0 = R_t\,\bar{\mathbf{v}}(\tau)$$

La soluzione $\bar{\mathbf{u}}(\tau)$ si trova nello spazio immagine dell'operatore aggiunto $R_t^*\,:\,\eta \to \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)}\eta$

$$\bar{\mathbf{u}}(\tau) = R_t^*\,\eta$$

dove con η si è indicata una nuova incognita da determinare. Tale incognita soddisfa il sistema

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \underbrace{R_t R_t^*}_{W_t}\eta = W_t\,\eta$$

Se il sistema è raggiungibile, la matrice $W_t = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\,\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)}d\tau$ è a rango pieno per cui

$$\eta = (W_t)^{-1}[\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)]$$

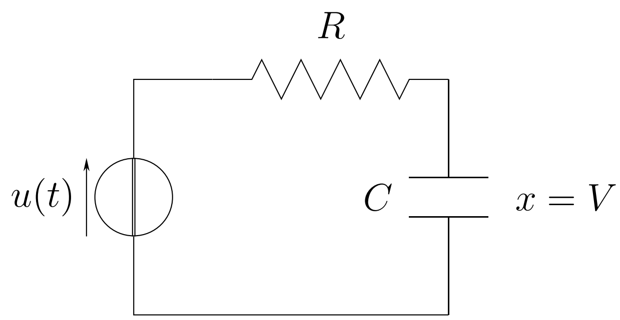
La soluzione a norma minima è quindi la seguente:

$$\bar{\mathbf{u}}(\tau) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)}(W_t)^{-1}[\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)]$$

La soluzione $\bar{\mathbf{u}}(\tau)$ è quella a norma minima in quanto essa è perpendicolare alla soluzione $\bar{\mathbf{v}}$ del sistema omogeneo. Infatti $\bar{\mathbf{v}} \in \ker R_t$, $\bar{\mathbf{u}}(\tau) \in \mathrm{Im}R_t^*$ e questi due sottospazi sono ortogonali fra di loro:

$$\ker R_t = (\mathrm{Im}R_t^*)^\perp$$

Esempio. Si consideri il seguente circuito elettrico:



Si calcoli la funzione di ingresso $u(\tau)$ di norma minima che porti la tensione V del condensatore dal valore nullo $V(0) = 0$ al valore $V(t_f) = 6$ V nell'intervallo di tempo $[0\ t_f]$ essendo $t_f = 1$.

L'equazione dinamica del sistema è:

$$C\frac{dV}{dt} = \frac{u - V}{R} \qquad \rightarrow \qquad \dot{V} = -\frac{V}{RC} + \frac{u}{RC}$$

Posto $x = V$, $a = \frac{1}{RC}$ e $b = \frac{1}{RC}$, l'equazione diventa:

$$\dot{x} = -a\,x + b\,u$$

In questo caso, essendo $\mathbf{A} = a$ e $\mathbf{B} = b$, il gramiano di raggiungibilità è il seguente:

$$\begin{aligned} W_{t_f} &= \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B}\,\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_f-\tau)}d\tau = \int_0^{t_f} b^2 e^{2\,a(t_f-\tau)}d\tau \\ &= b^2\left[-\frac{e^{2\,a(t_f-\tau)}}{2a}\right]_0^{t_f} = \frac{b^2(e^{2\,a\,t_f}-1)}{2a} \end{aligned}$$

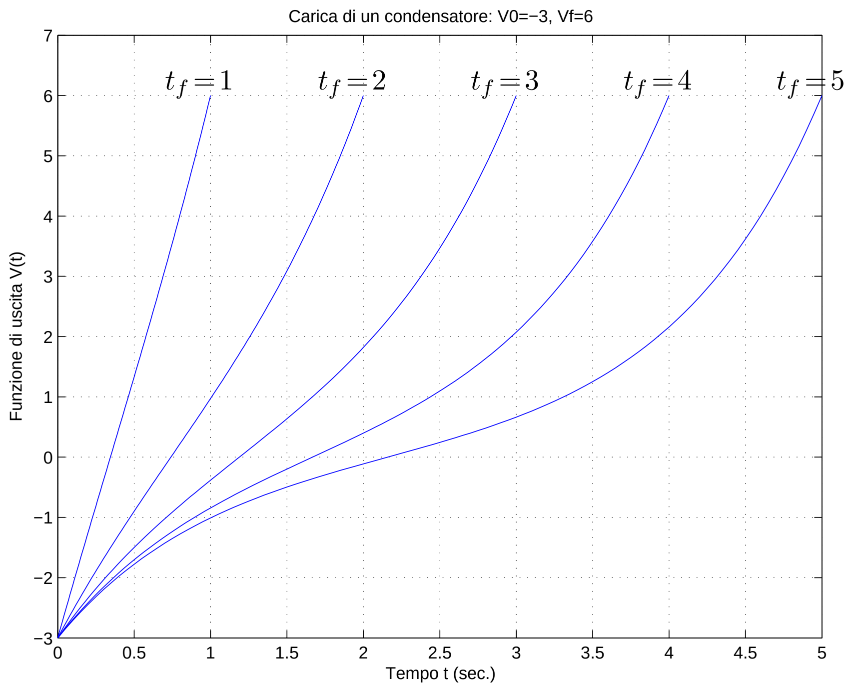
La funzione di ingresso $u(\tau)$ a norma minima è la seguente:

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_f-\tau)}(W_{t_f})^{-1}[x(t_f) - e^{\mathbf{A}}x(0)] \\ &= \frac{2\,a\,e^{-a(t_f-\tau)}}{b(e^{2\,a\,t_f}-1)}[x(t_f) - e^{a\,t_f}x(0)] \end{aligned}$$

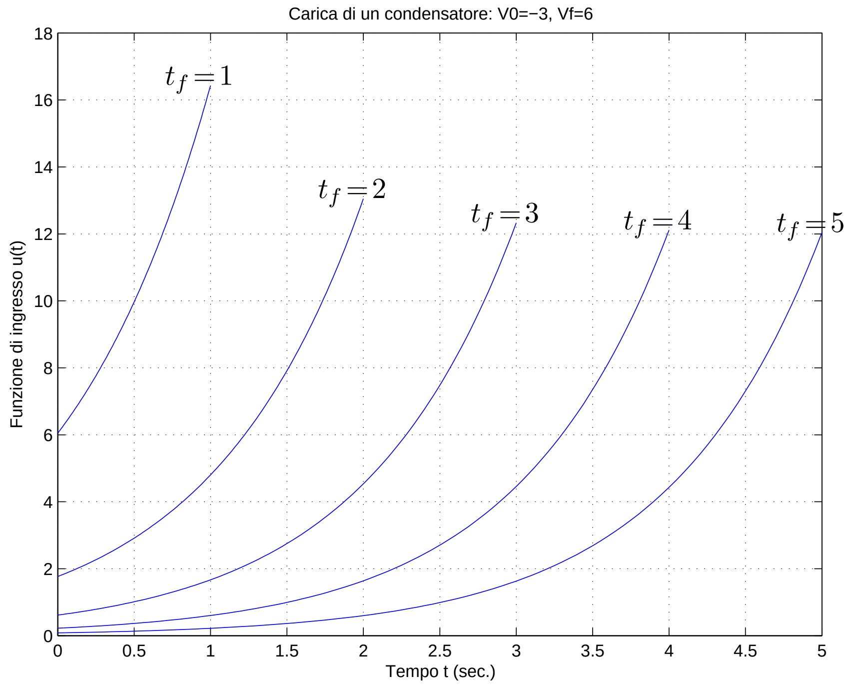
Nel caso in cui $C = 1$ F, $R = 1\,\Omega$, $t_f = 1$, $x(0) = 0$, $x(t_f) = 6$ si ha $a = -1$, $b = 1$ e

$$u(\tau) = \frac{12\,e^{\tau}}{e - e^{-1}}$$

Andamento della tensione di uscita $V(t)$:



Andamento della tensione in ingresso $u(t)$:



Per i dettagli si faccia riferimento i file Matlab “opt_t_rc.m” e “schema_base_s.mdl”.

```
%
% Calcolo della funzione ottima di ingresso per il caricamanto
% di un condensatore
%
x0=-3;                          % Stato iniziale
xf=6;                           % Stato finale
a=-1;                           % Coefficienti dell'equazione alle differenze
b=1;
%
figure(1); clf
figure(2); clf
for tf=[1:5];                                   % Al variare dell'istante finale
  Wt=(b^2)*(exp(2*a*tf)-1)/(2*a);               % Gramiano di raggiungibilit
  tau=[0:0.01:1]*tf;
  u=b*exp(a*(tf-tau))*inv(Wt)*(xf-exp(a*tf)*x0);    % Sequenza ottima degli ingressi
  MA=a; MB=b; MC=1; T=tau'; U=u';
  OPTIONS = SIMSET('InitialState',x0);
  [t,x,y]=sim('schema_base_s',tau,OPTIONS);
  figure(1);
  plot(t,x); hold on                            % Graficazione
  text(tf-0.3,xf+0.2,['tf=' num2str(tf)])
  figure(2);
  plot(tau,u); hold on                          % Graficazione
  text(tau(end)-0.3,u(end)+0.2,['tf=' num2str(tf)])
end
figure(1); grid
title(['Carica di un condensatore: V0=' num2str(x0) ', Vf=' num2str(xf)])
ylabel('Funzione di uscita V(t)')
xlabel('Tempo t (sec.)')
%
figure(2); grid
title(['Carica di un condensatore: V0=' num2str(x0) ', Vf=' num2str(xf)])
ylabel('Funzione di ingresso u(t)')
xlabel('Tempo t (sec.)')
```