

## Definizione di Sistema Dinamico

Esistono vari tipi di sistemi dinamici: tempo continui, tempo discreti, lineari, non lineari, a variabili concentrate, a variabili distribuite, a stati finiti, ecc. L'elemento principale che caratterizza tutti i sistemi dinamici è l'esistenza di uno spazio degli stati  $X$  e uno di spazio delle uscite  $Y$  sui quali sono definite le seguenti 2 funzioni:

- funzione di transizione dello stato:

$$x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

dove  $t_0 \in \mathcal{T}$  è l'istante iniziale,  $t \in \mathcal{T}$  è l'istante attuale,  $x(t_0) \in X$  è lo stato iniziale,  $x(t) \in X$  è lo stato attuale,  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  è la funzione che definisce la sequenza dei valori di ingresso nell'intervallo  $[t_0, t]$ .

- funzione di uscita:

$$y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$$

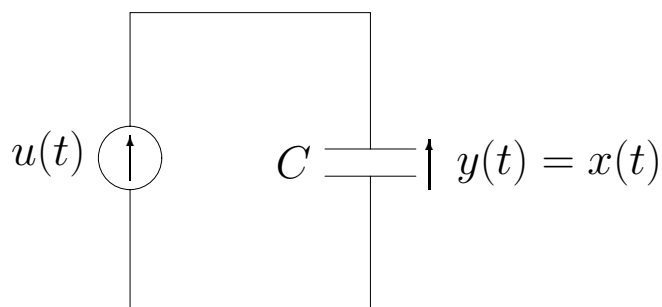
dove:  $t \in \mathcal{T}$  è l'istante attuale,  $x(t) \in X$  è lo stato attuale,  $u(t) \in U$  è l'ingresso attuale.

Se la funzione di uscita non dipende dall'ingresso  $u(\cdot)$ :

$$y(t) = \eta(t, x(t))$$

il sistema è strettamente causale (strettamente proprio). Se  $\mathcal{T} = \mathcal{R}$ , il sistema dinamico è *tempo-continuo* Se  $\mathcal{T} = \mathcal{Z}$ , il sistema dinamico è *tempo-discreto*.

Esempio: si consideri un sistema dinamico composto da un generatore di corrente  $u(t)$  ed un condensatore. La tensione ai capi del condensatore  $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ , rappresenta lo stato del sistema.

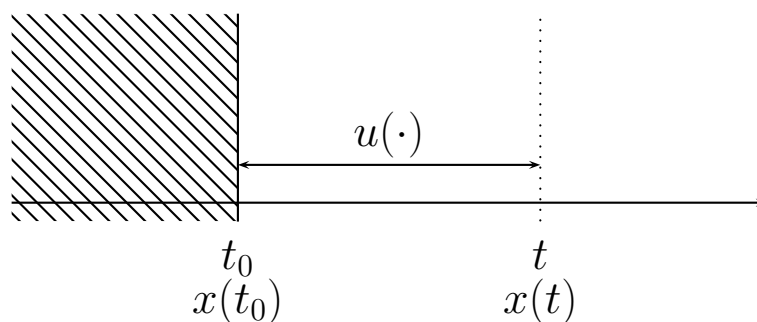


“Storia” dell’ingresso  $u(t)$  nell’intervallo  $[t_0, t]$  :  $u(\cdot)$

$$x(t) = x(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

$\uparrow$  Stato attuale       $\uparrow$  Stato iniziale

Significato fisico delle variabili di stato. I valori assunti dalle variabili di stato in un generico istante di tempo contengono, nel loro complesso, tutta l’informazione sulla storia passata del sistema necessaria per valutare l’andamento futuro sia delle stesse variabili di stato che di quelle di uscita, una volta noto l’andamento degli ingressi per tempi successivi all’istante considerato.



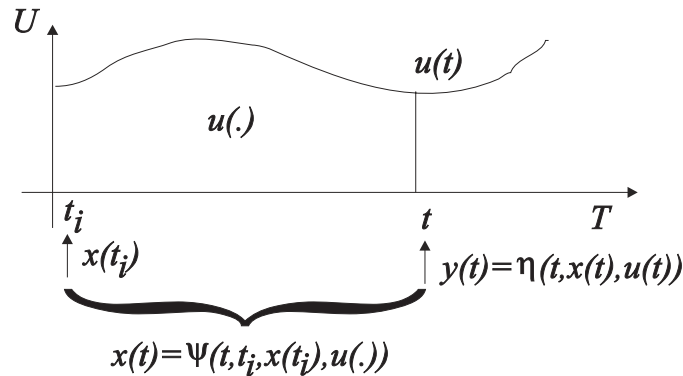
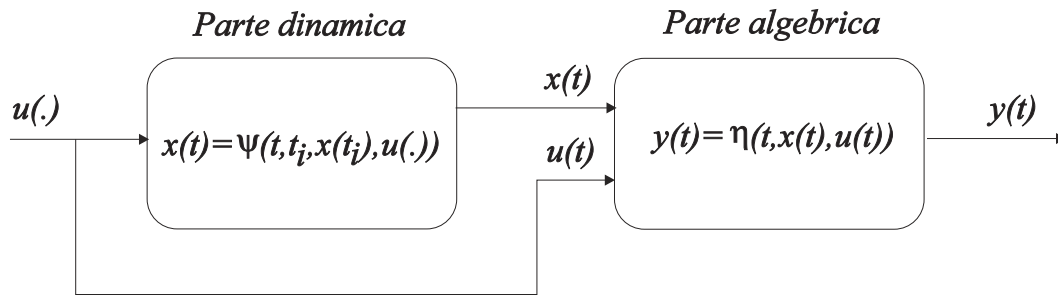
Per determinare lo stato  $x(t)$  all’istante  $t$  è necessario conoscere lo stato  $x(t_0)$  all’istante  $t_0$  e la funzione di ingresso  $u(\cdot)$  nell’intervallo di tempo  $[t_0, t]$ .

$$x(t) = \psi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$$

Il concetto di stato ci permette di non prendere in considerazione tutta la storia passata del sistema prima dell’istante  $t_0$ .

Le variabili di stato non sono definite in modo univoco: tipicamente esistono infiniti modi diversi di definire lo “stato” di un sistema;

## Proprietà di separazione nello spazio degli stati:



- *Parte dinamica del sistema.* La funzione di transizione permette di riassumere la storia passata del sistema nelle sue *variabili di stato* ad un certo istante  $t$ .
- *Parte algebrica del sistema.* La funzione di uscita esprime le *variabili di uscita* secondo grandezze note allo stesso istante  $t$ .

Nel caso di un sistema dinamico tempo-continuo regolare e a *dimensioni finite*, la funzione di transizione dello stato  $x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$  è soluzione di una equazione differenziale vettoriale del tipo:

$$\dot{x}(t) \triangleq \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

Nel caso tempo-discreto la funzione di stato è un'equazione alle differenze:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

Le funzioni  $f(x(t), u(t), t)$  e  $f(x(k), u(k), k)$ , dette *funzioni di stato*, vengono usate per descrivere in modo "implicito" la parte dinamica del sistema.

## Rappresentazione vettoriale dei sistemi dinamici

Per rappresentare matematicamente i sistemi dinamici *continui* e *discreti* caratterizzati da  $m$  ingressi,  $n$  stati e  $p$  uscite si utilizzano i seguenti vettori:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

dove  $\mathbf{x}(t) \in X = \mathcal{R}^n$  è il vettore di stato,  $\mathbf{u}(t) \in U = \mathcal{R}^m$  è il vettore degli ingressi e  $\mathbf{y}(t) \in Y = \mathcal{R}^p$  è il vettore delle uscite, tutti calcolati all'istante  $t \in \mathcal{T} = \mathcal{R}$ .

Compattando la notazione, per un sistema tempo-continuo di *dimensione*  $n$  con  $m$  ingressi ed  $p$  uscite scriveremo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

Per i sistemi discreti valgono notazioni equivalenti, sostituendo  $k \in \mathcal{Z}$  a  $t$ .

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \end{cases}$$

Per i sistemi dinamici continui [discreti], tempo-invarianti, la funzione di transizione dello stato  $\psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$  non dipende dai parametri  $t$  e  $t_0$  [ $k$  e  $h$ ] in modo indipendente, ma è *funzione solamente dalla differenza*  $t - t_0$  [ $k - h$ ] tra l'istante finale  $t$  [ $k$ ] e l'istante iniziale  $t_0$  [ $h$ ].

Per questo motivo è sempre possibile semplificare le notazioni facendo coincidere l'istante iniziale  $t_0$  [ $h$ ] con l'origine dei tempi  $t_0 = 0$  [ $h = 0$ ].

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \end{cases}$$

## Sistemi dinamici lineari continui

Un sistema dinamico *non-lineare*, *continuo*, a *dimensione finita* e tempo-variante è sempre descrivibile in forma “implicita” nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

Se il sistema dinamico è lineare tempo-variante, la *funzione di stato* e la *funzione di uscita* assumono la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Risolvendo questa equazione differenziale matriciale si ottiene la descrizione “esplicita” del sistema dinamico lineare, cioè si determina in modo esplicito la *funzione di transizione dello stato*:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

dove  $t_0$  è istante iniziale,  $\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)$  rappresenta l'*evoluzione libera*, il termine  $\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$  rappresenta l'*evoluzione forzata*, e dove  $\Phi(t, t_0)$  è la matrice di transizione dello stato che si ottiene risolvendo la seguente equazione differenziale matriciale:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)$$

con condizione iniziale:  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ .

Nota: si può dimostrare che la  $i$ -esima colonna della matrice  $\Phi(t, t_0)$  coincide con l'evoluzione libera del sistema dinamico a partire dalla condizione iniziale  $\mathbf{e}_i$  coincidente con l' $i$ -esima colonna della matrice identità  $\mathbf{I}_n$ .

Nel caso di sistema continuo lineare, tempo-invariante, la forma “implicita” del sistema assume la seguente forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

In questo caso, la *matrice di transizione dello stato*  $\Phi(t, t_0)$  dipende soltanto dalla differenza  $t - t_0$ ,  $\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0)$ , per cui senza togliere generalità alla trattazione potremo porre  $t_0 = 0$  e scrivere che la *matrice di transizione dello stato*  $\Phi(t)$  è soluzione della seguente equazione differenziale matriciale:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \mathbf{A} \Phi(t)$$

con condizione iniziale  $\Phi(0) = \mathbf{I}$ . La soluzione di tale equazione è data dalla seguente serie di potenze a coefficienti matriciali:

$$\Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} + \dots \triangleq \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$$

La verifica per sostituzione è immediata se si applica il teorema di derivazione per serie:

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!} + \dots \right] = \mathbf{A} \Phi(t)$$

In modo formale, tale serie *esponenziale* viene indicata con il simbolo  $e^{\mathbf{A}t}$ , oppure  $\exp(\mathbf{A}t)$ :

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}$$

La *funzione di transizione dello stato* assume quindi la seguente forma:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Nel caso in cui si scelga  $t_0 = 0$  si ha:  $\Phi(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$  e quindi si ottiene:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

**Esempio.** Si consideri il seguente sistema lineare continuo tempo-variante

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t)$$

Risolvere il sistema a partire dalla condizione iniziale  $x(t_0) = x_0$ .

- Nel caso tempo-variante, la matrice di transizione dello stato si determina risolvendo la seguente equazione differenziale omogenea

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = a(t)\Phi(t, t_0)$$

a partire dalla condizione iniziale  $\Phi(t_0, t_0) = 1$ . Operando le seguenti trasformazioni

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\Phi}(t, t_0)}{\Phi(t, t_0)} = a(t) &\quad \rightarrow \quad \frac{d \ln \Phi(t, t_0)}{dt} = a(t) &\quad \rightarrow \\ &\quad \rightarrow \quad \ln \Phi(t, t_0) = \int_{t_0}^t a(\rho) d\rho \end{aligned}$$

si ricava che

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(\rho) d\rho}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi la seguente:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\rho) d\rho} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{\tau}^t a(\rho) d\rho} b(\tau) u(\tau) d\tau$$

- Nel caso in cui si abbia un parametro  $a(t)$  costante,  $a(t) = a$ , la matrice di transizione si semplifica come segue

$$\Phi(t, t_0) = e^{a(t-t_0)}$$

per cui la soluzione dell'equazione differenziale diventa

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b(\tau) u(\tau) d\tau$$

- Nel caso di ingresso costante  $u(t) = u_0$  e parametro  $b(t) = b$  costante, la soluzione si semplifica ulteriormente

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \left( \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} d\tau \right) b u_0$$

Il termine racchiuso tra parentesi può essere trasformato come segue

$$\int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{-a} [e^{a(t-\tau)}]_{t_0}^t = \frac{e^{a(t-t_0)} - 1}{a}$$

per cui, in questo caso, la soluzione del problema diventa

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \frac{e^{a(t-t_0)} - 1}{a} b u_0$$

## Sistemi dinamici lineari discreti

Un sistema dinamico *non-lineare*, *discreto*, a *dimensione finita* e *tempo-variante* è sempre descrivibile in forma “implicita” nel modo seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \end{cases}$$

Nel caso di sistema dinamico *“lineare” tempo-variante*, la *funzione di stato* e la *funzione di uscita* assumono la seguente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

Risolvendo questa equazione alle differenze di tipo matriciale si ottiene la seguente descrizione “esplicita” del sistema dinamico:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, h)\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \Phi(k, j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{u}(j)$$

dove  $h$  è l'istante iniziale, il primo termine  $\Phi(k, h)\mathbf{x}(h)$  rappresenta l'*evoluzione libera*, il secondo termine  $\sum_{j=h}^{k-1} \Phi(k, j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{u}(j)$  rappresenta l'*evoluzione forzata* e dove  $\Phi(k, h)$  è la *matrice di transizione dello stato* così definita:

$$\Phi(k, h) = \begin{cases} \mathbf{A}(k-1) \dots \mathbf{A}(h+1)\mathbf{A}(h) & \text{se } k > h \\ \mathbf{I} \text{ (Matrice identità)} & \text{se } k = h \end{cases}$$

Nel caso di sistemi discreti *lineari, tempo-invariante*, la forma “implicita” del sistema assume la seguente forma:

Per i sistemi discreti, la condizione di tempo-invarianza si traduce nella *non dipendenza* dal tempo delle matrici che descrivono la *funzione di stato* e la *funzione di uscita* del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \end{cases}$$

In questo caso la *matrice di transizione dello stato*  $\Phi(k, h)$  si semplifica. Essendo la matrice  $\mathbf{A}$  indipendente dal tempo, si ha che, per  $k > h$ :

$$\mathbf{A}(h) = \mathbf{A}(h + 1) = \dots = \mathbf{A}(k - 1) = \mathbf{A}$$

e quindi la matrice  $\Phi(k, h)$  risulta funzione della sola differenza  $k - h$ :

$$\Phi(k, h) = \mathbf{A}(k - 1)\mathbf{A}(k - 2) \dots \mathbf{A}(h) = \mathbf{A}^{k-h}$$

Posto  $h = 0$ , la *funzione di transizione dello stato* diventa quindi:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)} \mathbf{B} \mathbf{u}(j)$$

L'evoluzione forzata può anche essere scritta nella seguente forma matriciale:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)} \mathbf{B} \mathbf{u}(j) = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \mathbf{u}(k-3) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

**Esempio.** Sia dato il seguente sistema lineare discreto tempo-variante

$$x(k + 1) = \left( \alpha + \frac{\beta}{k} \right) x(k) + b(k)u(k)$$

definito per  $k \geq 1$ . Determinare la funzione di transizione dello stato del sistema a partire dalla condizione iniziale  $x(1) = x_1$ .

- Nel caso generale tempo-variante, la matrice di transizione dello stato vale

$$\Phi(k, h) = \begin{cases} \left( \alpha + \frac{\beta}{k-1} \right) \left( \alpha + \frac{\beta}{k-2} \right) \dots \left( \alpha + \frac{\beta}{h} \right) & \text{per } k > h \\ 1 & \text{per } k = h \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione alle differenze è quindi la seguente:

$$x(k) = \Phi(k, 1)x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \Phi(k, i + 1)b(i)u(i)$$

- Nel caso invece in cui si abbia  $\beta = 0$ , la matrice di transizione si semplifica

$$\Phi(k, h) = \alpha^{k-h}$$

per cui la soluzione dell'equazione alle differenze diventa

$$x(k) = \alpha^{k-1}x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{k-i-1}b(i)u(i)$$

- Se poi si considera il caso di ingresso costante  $u(k) = u_0$  ( $k \geq 1$ ) e parametro  $b(k) = b$  costante, allora la soluzione si semplifica ulteriormente

$$x(k) = \alpha^{k-1}x_1 + \left( \sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{k-i-1} \right) b u_0$$

Il termine racchiuso tra parentesi può essere trasformato come segue

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha^{k-i-1} = \sum_{i=0}^{k-2} \alpha^i = \frac{1 - \alpha^{k-1}}{1 - \alpha}$$

per cui la soluzione diventa

$$x(k) = \alpha^{k-1}x_1 + \frac{1 - \alpha^{k-1}}{1 - \alpha} b u_0$$

Nel caso lineare tempo-invariante

$$x(k+1) = \alpha x(k) + b u(k)$$

la risposta al gradino del sistema può essere calcolata anche utilizzando la tecnica delle  $\mathcal{Z}$ -trasformate:

$$z[X(z) - x(1)] = \alpha X(z) + b U(z)$$

Posto  $x(1) = x_1$  e isolando  $X(z)$  si ottiene:

$$X(z) = \frac{z}{z - \alpha} x_1 + \frac{b}{z - \alpha} U(z)$$

Nel caso di gradino unitario in ingresso

$$U(z) = \frac{u_0 z}{z - 1}$$

si ha che

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{z - \alpha} x_1 + \frac{b u_0 z}{(z - \alpha)(z - 1)} \\ &= \frac{z}{z - \alpha} x_1 + \frac{b u_0 z}{(1 - \alpha)} \left[ \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z - \alpha} \right] \end{aligned}$$

Antitrasformando e traslando di un periodo di campionamento si ottiene:

$$x(k) = \alpha^{k-1}x_1 + b u_0 \frac{1 - \alpha^{k-1}}{1 - \alpha}$$

## Trasformazioni nello spazio degli stati

Definizione di sistema dinamico:

$$\begin{aligned} x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot)) &\rightarrow \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) & \quad y(t) = g(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Definizione di sistema lineare:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

Definizione di sistema lineare stazionario:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

- Valgono le seguenti relazioni:

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

- Lo stesso sistema può venire rappresentato mediante differenti relazioni matriciali, tutte equivalenti, che differiscono solamente per la scelta dei vettori di base dello spazio degli stati. Ovviamente noi siamo interessati alle proprietà strutturali del sistema che non variano al variare della rappresentazione matematica.

## Autovalori ed autovettori

Sia dato uno spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  di dimensione  $n$  definito su di un campo  $\mathcal{K}$ , su cui sia definita una trasformazione lineare  $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$  a cui è associata la matrice quadrata  $\mathbf{A}$ , di ordine  $n$ .

Se esistono un vettore non nullo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  e uno scalare  $\lambda \in \mathcal{K}$  tali che:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$$

allora:

- $\lambda$  è un autovalore della matrice  $\mathbf{A}$ ;
- Ogni vettore  $\mathbf{v}$  che verifica tale relazione è un autovettore della matrice  $\mathbf{A}$  relativo all'autovalore  $\lambda$ . L'insieme di tutti gli autovettori associati ad un certo autovalore  $\lambda$  è uno spazio vettoriale detto autospazio  $U_\lambda$ . La dimensione  $\mu$  dell'autospazio  $U_\lambda$  è detta molteplicità geometrica dell'autovalore  $\lambda$ .
- L'insieme degli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  è detto spettro di  $\mathbf{A}$ .

Proprietà. L'autospazio  $U_\lambda$  è invariante rispetto alla matrice  $\mathbf{A}$ , cioè ogni elemento di  $U_\lambda$  viene "trasformato" dalla matrice  $\mathbf{A}$  in un elemento appartenente ancora ad  $U_\lambda$ .

Proprietà. Ad autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  distinti corrispondono autovettori linearmente indipendenti  $v_1, \dots, v_t$ . Per questo motivo due autospazi  $U_{\lambda_i}$  e  $U_{\lambda_j}$  relativi ad autovalori diversi  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$ , sono disgiunti.

Proprietà : Non sempre l'unione di tutti gli autospazi  $U_{\lambda_i}$  coincide con l'intero spazio vettoriale  $\mathcal{V}$ . Quando tale coincidenza si verifica, esiste sempre una base di  $\mathcal{V}$  esprimibile come combinazione lineare degli autovettori di  $\mathbf{A}$  e quindi esiste una trasformazione  $\mathbf{T}$  che consente di esprimere la matrice  $\mathbf{A}$  in forma diagonale.

## Determinazione degli autovalori

Le soluzioni  $\lambda_i$  della seguente equazione caratteristica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

sono *tutti e soli* gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ .

- Il polinomio:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \triangleq \Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$$

é detto polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$ . Inoltre, la molteplicità  $\eta$  dell'autovalore  $\lambda$  come soluzione dell'equazione caratteristica  $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$  è detta molteplicità algebrica dell'autovalore. In generale, la molteplicità algebrica non coincide con la molteplicità geometrica.

- Se  $\lambda$  è un autovalore, la soluzione del seguente sistema di equazioni nelle incognite  $v_1, \dots, v_n$ :

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = 0$$

fornisce l'insieme di tutti gli autovettori relativi all'autovalore  $\lambda$  (e quindi determina completamente l'autospazio  $U_\lambda$ ).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \mu = 2, \quad \eta = 2$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \mu = 1, \quad \eta = 2$$

Proprietà : L'insieme degli autovalori di una trasformazione lineare  $\mathbf{T}$  è indipendente dalla particolare base scelta per descrivere la trasformazione lineare stessa.

- L'insieme degli autovalori è una proprietà strutturale della trasformazione lineare  $T$  definita dalla matrice  $\mathbf{A}$  ed è quindi un elemento caratteristico del sistema fisico descritto dalla matrice di stato  $\mathbf{A}$ .

Proprietà. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Sia  $\mathbf{T}$  una matrice non singolare e sia  $\overline{\mathbf{A}}$  la matrice ottenuta da  $\mathbf{A}$  per similitudine

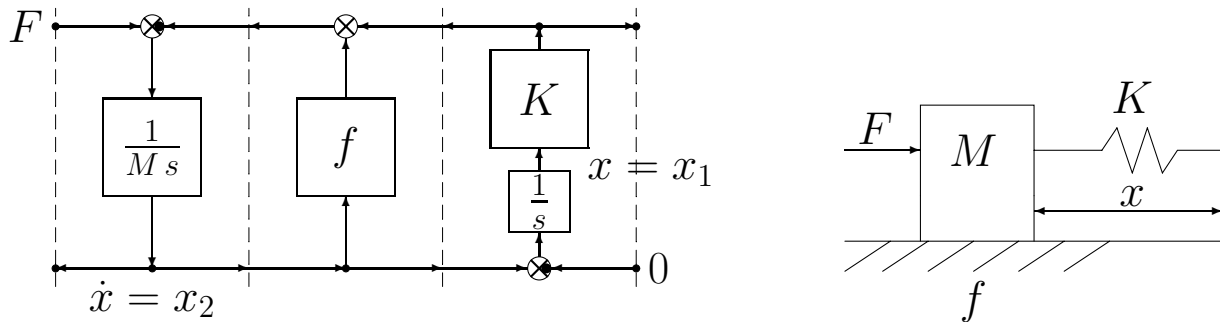
$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$$

Il polinomio caratteristico della matrice  $\overline{\mathbf{A}}$  è

$$\begin{aligned} \Delta_{\overline{\mathbf{A}}}(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}) \\ &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}) \\ &= \det(\lambda \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{T}^{-1} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{T}) \\ &= \det \mathbf{T}^{-1} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \det \mathbf{T} \\ &= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= \Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) \end{aligned}$$

Se le matrici  $\mathbf{A}$  e  $\overline{\mathbf{A}}$  hanno lo stesso polinomio caratteristico, allora sono anche caratterizzate dagli stessi autovalori.

Esempio. Consideriamo il sistema dinamico costituito da una massa  $M$  collegata ad una molla di costante elastica  $K$ , soggetta ad un attrito viscoso  $f$  e su cui agisce una forza  $F$ :



il comportamento del sistema può venire descritto dall'equazione:

$$F = M\ddot{x} + f\dot{x} + Kx$$

Ponendo:  $y = x = x_1$  e  $\dot{x}_1 = x_2$ , possiamo scrivere

$$\dot{x}_2 = -\frac{f}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{F}{M}$$

da cui:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{f}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{f}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$ :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + \lambda \frac{f}{M} + \frac{K}{M}$$

Gli zeri del polinomio caratteristico sono gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ :

$$\lambda_1 = -\frac{f}{2M} - \sqrt{\left(\frac{f}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{f}{2M} + \sqrt{\left(\frac{f}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

Funzione di trasferimento:

$$\frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + fs + K} = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{f}{M}s + \frac{K}{M}}$$

Poli della funzione di trasferimento:

$$s_1 = -\frac{f}{2M} - \sqrt{\left(\frac{f}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

$$s_2 = -\frac{f}{2M} + \sqrt{\left(\frac{f}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

Gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  coincidono con i poli della funzione di trasferimento del sistema dinamico considerato.