Modi dominanti

L'evoluzione libera del sistema lineare

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$

a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ è:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0, \qquad \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$$

Al tendere di t [di k] all'infinito, i modi del sistema tendono a zero, rimangono costanti o divergono in funzione del valore degli autovalori. Alcuni di essi, però, tendono a zero più rapidamente rispetto agli altri, per cui la loro influenza sul comportamento asintotico del sistema diventa trascurabile all'aumentare del tempo.
1) Consideriamo inizialmente il caso di autovalori reali distinti.

Definizione. *Siano λ_i gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$. L'autovalore λ_1 è l'autovalore dominante della matrice $\mathbf{A}$ se vale la seguente relazione:*

- *nel caso tempo-continuo*

$$Re(\lambda_1) > Re(\lambda_2) \geq Re(\lambda_3) \geq \ldots \geq Re(\lambda_n)$$

- *nel caso tempo-discreto*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

Proprietà. *Al tendere di t [di k] all'infinito, l'evoluzione libera $x(t)$ [$x(k)$] di un sistema lineare tempo-continuo [tempo-discreto] tende ad appiattirsi lungo il sottospazio corrispondente all'autovalore dominante, cioè l'autovalore λ_1 a parte reale [a modulo] più grande.*

Siano $\mathbf{v}_i$ gli autovettori associati agli autovalori λ_i. Siccome gli autovettori $\mathbf{v}_i$ costituiscono una base dello spazio degli stati, una qualsiasi condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ può essere espressa come somma delle sue componenti lungo gli autovettori $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{x}_0 = x_{0,1}\mathbf{v}_1 + x_{0,2}\mathbf{v}_2 + \ldots + x_{0,n}\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{n} x_{0,i}\mathbf{v}_i$$

Le componenti $x_{0,i}$ di tale scomposizione si possono esprimere come segue

$$x_{0,i} = \mathbf{v}_i^{*T}\mathbf{x}_0$$

cioè come prodotto scalare tra il vettore $\mathbf{x}_0$ e le righe $\mathbf{v}_i^*$ della matrice $\mathbf{T}^{-1}$:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{array}\right], \qquad\qquad \mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^{*T} \\ \mathbf{v}_2^{*T} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^{*T} \end{array}\right]$$

Le evoluzioni libere $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}(k)$ corrispondenti alla condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ sono:

$$\mathbf{x}(t) = x_{0,1}e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + x_{0,2}e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \ldots + x_{0,n}e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$

e

$$\mathbf{x}(k) = x_{0,1}\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + x_{0,2}\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \ldots + x_{0,n}\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

Se $x_{0,1} \neq 0$, le evoluzioni libere $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}(k)$ possono essere riscritte nel modo seguente

$$\mathbf{x}(t) = x_{0,1}e^{\lambda_1 t}\left[\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{x_{0,i}e^{\lambda_i t}}{x_{0,1}e^{\lambda_1 t}}\mathbf{v}_i\right]$$

e

$$\mathbf{x}(k) = x_{0,1}\lambda_1^k\left[\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{x_{0,i}\lambda_i^k}{x_{0,1}\lambda_1^k}\mathbf{v}_i\right]$$

Chiaramente, al tendere di t e di k all'infinito, si ha che

$$\mathbf{x}(t) \underset{t\to\infty}{\simeq} x_{0,1}e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}(k) \underset{k\to\infty}{\simeq} x_{0,1}\lambda_1^k\mathbf{v}_1$$

cioè, indipendentemente dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0$, se $x_{0,1} \neq 0$ l'evoluzione libera del sistema tende verso l'autospazio $\mathrm{span}[\mathbf{v}_1]$ corrispondente al polo dominante.

2) Prendiamo ora in considerazione il caso di autovalori complessi coniugati.

In questo caso, una coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ viene detta "*dominante*" rispetto agli altri autovalori se, nel caso tempo-continuo, vale la seguente relazione:

$$Re(\lambda_1) = Re(\underbrace{\lambda_1^*}_{\lambda_2}) > Re(\lambda_3) \geq Re(\lambda_4) \geq \ldots \geq Re(\lambda_n)$$

Sia $\mathbf{v}_1$ l'autovettore complesso corrispondente all'autovalore λ_1 e siano $\mathbf{v}_{1R}$ e $\mathbf{v}_{1I}$, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria dell'autovettore $\mathbf{v}_1$. La condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ può sempre essere espressa come somma delle sue componenti lungo $\mathbf{v}_{1R}$, $\mathbf{v}_{1I}$ e gli altri autovettori $\mathbf{v}_i$ del sistema:

$$\mathbf{x}_0 = x_{0,1}\mathbf{v}_{1R} + x_{0,2}\mathbf{v}_{1I} + x_{0,3}\mathbf{v}_3 \ldots + x_{0,n}\mathbf{v}_n$$

L'evoluzione libera $\mathbf{x}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ assume la seguente forma:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_{1R}\,\mathbf{v}_{1I}\end{bmatrix} e^{\sigma t} \begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_{0,1}\\ x_{0,2}\end{bmatrix} + x_{0,3}e^{\lambda_3 t}\mathbf{v}_3 + \ldots + x_{0,n}e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$

che può anche essere riscritta nel seguente modo

$$\mathbf{x}(t) = e^{\sigma t}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{1R} & \mathbf{v}_{1I}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_{0,1}\\ x_{0,2}\end{bmatrix} + \sum_{i=3}^{n} \frac{x_{0,i}e^{\lambda_i t}}{e^{\sigma t}}\mathbf{v}_i\right\}$$

Al tendere di t all'infinito, si ha che

$$\mathbf{x}(t) \underset{t\to\infty}{\simeq} e^{\sigma t}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{1R} & \mathbf{v}_{1I}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_{0,1}\\ x_{0,2}\end{bmatrix}$$

cioè l'evoluzione libera del sistema tende verso il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_{1R}$ e $\mathbf{v}_{1I}$.
Considerazioni analoghe valgono anche nel caso di sistemi tempo-discreti con autovalori complessi coniugati dominati.

Esempio. Dato il seguente sistema dinamico tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

determinare il sottospazio corrispondente al modo dominante.
Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s-3 & 1 & 0 \\ -1 & s-1 & 2 \\ 0 & 0 & s-2 \end{vmatrix} = (s-2)[(s-3)(s-1)+1] = (s-2)^3$$

Il sistema presenta 3 autovalori coincidenti: $\lambda = 2$. Il corrispondente autovettore $\mathbf{v}_1$ si ottiene risolvendo il sistema

$$(2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \mathbf{o} \qquad \leftrightarrow \qquad = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovettori generalizzati $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ si ricavano nel modo seguente:

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la matrice di trasformazione

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice $\mathbf{A}$ viene diagonalizzata nel modo seguente

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

L'evoluzione libera $\overline{\mathbf{x}}(t)$ nello spazio trasformato è

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = e^{\overline{\mathbf{A}}t}\overline{\mathbf{x}} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 + \bar{x}_2 t + \bar{x}_3 \frac{t^2}{2} \\ \bar{x}_2 + \bar{x}_3 t \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

Se $\bar{x}_3 \neq 0$ si ha che:

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = \frac{t^2}{2} e^{2t} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \frac{2}{t^2} + \bar{x}_2 \frac{2}{t} + \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \frac{2}{t^2} + \bar{x}_3 \frac{2}{t} \\ \bar{x}_3 \frac{2}{t^2} \end{bmatrix} \underset{t\to\infty}{\simeq} \frac{t^2}{2} e^{2t} \bar{x}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{v}}_1}$$

La direzione $\mathbf{v}_1$ lungo la quale si appiattisce la traiettoria $\mathbf{x}(t)$ è la seguente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}(t) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}(t) \underset{t\to\infty}{\simeq} \frac{t^2}{2} e^{2t} \bar{x}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1}$$

Nel caso di sistema <u>tempo-discreto</u>:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$

si possono fare considerazioni analoghe. L'evoluzione libera è

$$\overline{\mathbf{x}}(k) = \overline{\mathbf{A}}^k \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

Analogamente al caso precedente, se $\bar{x}_3 \neq 0$, per $k \to \infty$ si ha che:

$$\overline{\mathbf{x}}(k) \underset{k\to\infty}{\simeq} \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \bar{x}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{v}}_1} = \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \bar{x}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1}$$