

## Rappresentazione in $s$ dei sistemi lineari continui.

Applicando la trasformazione di Laplace alle funzioni di *stato* ed *uscita* di un sistema lineare:

$$\mathcal{L} \left( \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}\mathbf{u}(s) \end{array} \right)$$

e quindi:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(s) \end{cases}$$

- Quando  $\mathbf{u}(t) = 0, \forall t \geq 0$ , si ha l'*evoluzione libera*:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \end{cases}$$

da cui si ricava che

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

- Quando  $\mathbf{x}_0 = 0$ , si ha l'*evoluzione forzata*:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(s) \end{cases}$$

- L'*inversa* di una matrice  $\mathbf{M}$  quadrata di ordine  $n$  non singolare, è definita come segue:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\text{agg } \mathbf{M}}{\det \mathbf{M}}$$

La *matrice aggiunta*,  $\text{agg } \mathbf{M}$ , è la *trasposta* (coniugata trasposta) della matrice dei complementi algebrici  $M_{i,j}$  della matrice  $\mathbf{M}$ .

Il complemento algebrico  $M_{i,j}$  è  $(-1)^{i+j}$  volte il determinante della matrice  $(n-1) \times (n-1)$  che si ottiene eliminando la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna di  $\mathbf{M}$ .

## Rappresentazione in $z$ dei sistemi lineari discreti.

Applicando la trasformazione “ $\mathcal{Z}$ ” alle funzioni di *stato* ed *uscita* di un sistema lineare:

$$\mathcal{Z} \left( \begin{array}{l} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} z(\mathbf{x}(z) - \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}\mathbf{u}(z) \end{array} \right)$$

e quindi:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0 + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0 + [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(z) \end{cases}$$

- Quando  $\mathbf{u}(k) = 0, \forall t \geq 0$ , si ha l'evoluzione libera:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 \end{cases}$$

- Quando  $\mathbf{x}_0 = 0$ , si ha l'evoluzione forzata:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z). \\ \mathbf{y}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(z). \end{cases}$$

- Vale la relazione:

$$z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathcal{Z}[\mathbf{A}^k]$$

da cui si ricava che:

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

## Matrice di trasferimento.

Caso tempo-continuo. La matrice *razionale propria* di dimensioni  $(p \times m)$ :

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s) \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{C} \operatorname{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Le funzioni razionali nella matrice  $\mathbf{H}(s) - \mathbf{D}$  sono strettamente proprie in quanto

- $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  è un polinomio di grado  $n$ ,
- $\mathbf{C} \operatorname{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}$  è una matrice polinomiale i cui elementi hanno gradi uguali a  $n - 1$  ( o minori, nel caso vi siano cancellazioni di fattori comuni nel numeratore e nel denominatore delle frazioni polinomiali).

Caso tempo-discreto. La matrice *razionale propria* di dimensioni  $(p \times m)$ :

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{u}(z) \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{C} \operatorname{agg}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Le funzioni razionali nella matrice  $\mathbf{H}(z) - \mathbf{D}$  sono strettamente proprie in quanto

- $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$  è un polinomio di grado  $n$ ,
- $\mathbf{C} \operatorname{agg}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}$  è una matrice polinomiale i cui elementi hanno gradi uguali a  $n - 1$  ( o minori, nel caso vi siano cancellazioni di fattori comuni nel numeratore e nel denominatore delle frazioni polinomiali).

Esempio. Calcolare l'esponenziale di matrice della matrice  $\mathbf{A}$

$$e^{\mathbf{A}t} \quad \text{dove} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$  è:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

Si ottiene quindi che

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Antitrasformando i singoli termini di questa matrice si ottiene

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \right] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \right] = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s+1)(s+2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \right] = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

per cui, sostituendo, si ha che

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

cioè si ottiene esattamente la stessa espressione ottenuta utilizzando la forma canonica di Jordan della matrice  $\mathbf{A}$ .

Esempio. Calcolare l'evoluzione libera del seguente sistema discreto autonomo

$$\mathbf{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k)$$

a partire dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  sono:  $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ ,  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$ . La soluzione del problema posto è formalmente nota:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$$

Vengono ora mostrati tre modi diversi di calcolare la matrice  $\mathbf{A}^k$ .

Soluzione. Uso delle  $\mathcal{Z}$ -trasformate. Questo procedimento si basa sulla relazione

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1} \left[ (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \right]$$

Procedendo nei calcoli si ha che

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{\begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix} z}{(z+1)(z+2)} \right\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{z+3}{(z+1)(z+2)} & \frac{1}{(z+1)(z+2)} \\ \frac{-2}{(z+1)(z+2)} & \frac{z}{(z+1)(z+2)} \end{bmatrix} z \right\}$$

Antitrasformando, si ottiene il risultato

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix}$$