Punti di equilibrio: sistemi tempo continui

- Si consideri il seguente sistema tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

- I punti di equilibrio $\mathbf{x}_0$ del sistema quando l'ingresso è costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ si determinano imponendo $\dot{\mathbf{x}} = 0$:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\,\mathbf{u}_0 = 0, \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}_0}$$

- Se la matrice $\mathbf{A}$ è invertibile, il sistema ammette un solo punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$.

- Se la matrice $\mathbf{A}$ è singolare (cioè se la matrice $\mathbf{A}$ ha almeno un autovalore nell'origine) si possono avere due diversi casi:

  1) *Esistono infiniti punto di equilibrio.* Questa situazione si ha quando: $\mathrm{rango}[\mathbf{A}] = \mathrm{rango}[\mathbf{A}\,\mathbf{B}]$. In questo caso tutte le soluzioni si ottengono sommando ad una soluzione particolare $\bar{\mathbf{x}}_0$ il kernel della matrice $\mathbf{A}$:

  $$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \ker[\mathbf{A}]$$

  2) *Non esistono punti di equilibrio.* Questa situazione si ha quando: $\mathrm{rango}[\mathbf{A}] \neq \mathrm{rango}[\mathbf{A}\,\mathbf{B}]$.

- Il valore $\mathbf{y}_0$ dell'uscita corrispondente ad una condizione di equilibrio si ottiene direttamente dall'equazione di uscita:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{D}\,\mathbf{u}_0$$

  Se la matrice $\mathbf{A}$ è invertibile vale anche la seguente relazione:

$$\mathbf{y}_0 = -\mathbf{C}\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}_0 + \mathbf{D}\,\mathbf{u}_0 = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]_{s=0}\mathbf{u}_0 = \mathbf{H}(s)_{s=0}\mathbf{u}_0$$

  dove con $\mathbf{H}(s)$ si è indicata la matrice di trasferimento del sistema.

- Per sistemi lineari la stabilità di un punto di equilibrio non dipende dal punto stesso, ma è una proprietà strutturale del sistema completamente definita dalla posizione degli autovalori della matrice $\mathbf{A}$.

Punti di equilibrio: sistemi tempo discreti

- Si consideri il seguente sistema <u>tempo discreto</u>:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

- I punti di equilibrio $\mathbf{x}_0$ del sistema quando l'ingresso è costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ si determinano imponendo $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\,\mathbf{u}_0, \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{x}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}_0}$$

- In questo caso il sistema ammette un solo punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ solo se la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è invertibile.

- Se invece la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è singolare (cioè se ha almeno un autovalore in $z = 1$), il sistema:

  1) *presenta infiniti punti di equilibrio* se $\mathrm{rango}[\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \mathrm{rango}[(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{B}]$:

  $$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \ker[\mathbf{I} - \mathbf{A}]$$

  2) *non ha nessun punto di equilibrio* se $\mathrm{rango}[\mathbf{I} - \mathbf{A}] \neq \mathrm{rango}[(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{B}]$.

- Anche in questo caso il valore $\mathbf{y}_0$ dell'uscita corrispondente alla condizione di equilibrio $\mathbf{x}_0$ è la seguente:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{D}\,\mathbf{u}_0$$

- Se la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ è invertibile vale la seguente relazione:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\,(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}_0 + \mathbf{D}\,\mathbf{u}_0 = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]_{z=1}\mathbf{u}_0 = \mathbf{H}(z)_{z=1}\mathbf{u}_0$$

  dove con $\mathbf{H}(z)$ si è indicata la matrice di trasferimento del sistema discreto.

- Il guadagno statico $\mathbf{H}(z)_{z=1}$ della matrice di trasferimento è infinito se la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ ha almeno un autovalore nell'origine, cioè se la matrice $\mathbf{A}$ ha almeno un autovalore in $z = 1$.

Punti di equilibrio: sistemi non lineari

- Si consideri ora il seguente sistema non lineare tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

  I punti di equilibrio $\mathbf{x}_0$ per l'ingresso costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ si determinano imponendo $\dot{\mathbf{x}} = 0$:

$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0}$$

- In questo caso si tratta di risolvere rispetto a $\mathbf{x}_0$ una funzione vettoriale non lineare. Per sistemi non lineari si possono avere tutti i casi possibili: 1) nessun punto di equilibrio; 2) un solo punto di equilibrio; 3) un numero finito di punto di equilibrio; 4) infiniti punti di equilibrio tutti isolati; ecc.

- Il valore $\mathbf{y}_0$ dell'uscita corrispondente ad una condizione di equilibrio $\mathbf{x}_0$ di ottiene direttamente dall'equazione di uscita:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$$

- Per sistemi non lineari la stabilità non è più una proprietà globale del sistema, ma una proprietà "locale" del singolo punto di equilibrio. Occorre fare un'analisi di stabilità specifica per ciascun punto di equilibrio.

- Nel caso di sistemi non lineari tempo discreti:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \end{cases}$$

- I punti di equilibrio $\mathbf{x}_0$ del sistema quando l'ingresso è costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ si determinano imponendo $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_0$:

$$\boxed{\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$

Linearizzazione nell'intorno di un punto di equilibrio

- Si consideri ora il seguente sistema non lineare <u>tempo continuo</u>:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio del sistema per ingresso costante $\mathbf{u}_0$. Sviluppando in serie le funzioni $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ nell'intorno del punto $(\mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}_0)$ si ottiene:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}_{0} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}_{\mathbf{y}_0} + \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) + \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

dove con $\mathbf{h}_1(\cdot)$ e $\mathbf{h}_2(\cdot)$ si sono indicati gli infinitesimi di ordine superiore che si suppone di poter trascurare nell'interno del punto di equilibrio $(\mathbf{x}_0,\ \mathbf{u}_0)$.

- Utilizzando come nuove variabili di sistema le distanze dal punto di equilibrio, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$, e $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, si ottiene il seguente sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\, \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\, \tilde{\mathbf{u}}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\, \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\, \tilde{\mathbf{u}}(t) \end{cases}$$

dove le matrici di sistema sono le seguenti:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \qquad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$

e

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \qquad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$

- La stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto di equilibrio può essere studiata applicando il criterio "ridotto" di Lyapunov al sistema linearizzato.

- Nel caso di sistemi non lineari tempo-discreti

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \end{cases}$$

la linearizzazione nell'intorno di un eventuale punto di lavoro $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ viene fatta esattamente come nel caso tempo continuo:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\,\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\,\tilde{\mathbf{u}}(k) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}\,\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\,\tilde{\mathbf{u}}(k) \end{cases}$$

cioè le matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ si ottengono utilizzando le stesse formule precedentemente fornite.

- Per rendere ben chiaro il modo di calcolare le matrici di sistema, è bene ricordare che i vettori non lineari $\mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{u})$ hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) \\ g_2(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x},\, \mathbf{u}) \end{bmatrix}$$

per cui valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}, \qquad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}$$

e

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{x}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}, \qquad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\, \mathbf{u}}\right|_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0)}$$

- Le matrici Jacobiane così ottenute hanno quindi le seguenti dimensioni: $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{p\times n}$ e $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{p\times m}$.