

Funzione di matrice

Sia $f(\lambda)$ una generica funzione del parametro λ sviluppabile in serie di potenze

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda^i$$

Sia \mathbf{A} una matrice quadrata di ordine n . La funzione di matrice $f(\mathbf{A})$ è definita nel modo seguente

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{A}^i$$

Sia m il grado del polinomio minimo $m(\lambda)$ della matrice \mathbf{A} . È possibile dimostrare che esistono m coefficienti γ_i , con $i = 0, \dots, m-1$, tali per cui la funzione di matrice $f(\mathbf{A})$ può essere riscritta nel modo seguente:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \mathbf{A}^i$$

Si noti che si è passati da una serie infinita ad una combinazione lineare delle sole potenze della matrice \mathbf{A} di grado minore di m . Questo è possibile in quanto, essendo $m(\lambda)$ il polinomio minimo annullante della matrice \mathbf{A} , allora tutte le potenze della matrice \mathbf{A} di ordine maggiore o uguale ad m possono essere espresse come combinazioni lineari delle potenze di \mathbf{A} di ordine minore ad m

$$m(\mathbf{A}) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^m = - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathbf{A}^i$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa equazione per \mathbf{A} si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{m+1} &= - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{i-1} \mathbf{A}^i - \alpha_{m-1} \mathbf{A}^m \\ &= - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{i-1} \mathbf{A}^i - \alpha_{m-1} \left[- \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathbf{A}^i \right] \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{m-1} \alpha_i - \alpha_{i-1}) \mathbf{A}^i \end{aligned}$$

dove si ha $\alpha_i = 0$ per $i < 0$. Per potenze di ordine superiore si procede in modo analogo.

L'esponenziale di matrice gode infatti della seguenti proprietà:

- Sia \mathbf{T} una matrice non singolare:

$$e^{\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}t} = \mathbf{T}e^{\bar{\mathbf{A}}t}\mathbf{T}^{-1}$$

come si può facilmente verificare dalla definizione di esponenziale di matrice

$$e^{\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}t)^n}{n!} = \mathbf{T} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{\mathbf{A}}t)^n}{n!} \right) \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{T}^{-1}$$

- Per calcolare l'inversa della matrice $e^{\mathbf{A}}$ basta cambiare segno all'esponente

$$(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$$

- Se le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} commutano, cioè se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, allora vale la relazione:

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$$

Sia $f(\lambda)$ una qualunque funzione del parametro λ sviluppabile in serie di Taylor. La funzione di matrice $f(\mathbf{A})$ pu'ò essere calcolata utilizzando la relazione

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \mathbf{A}^i$$

dove m è il grado del polinomio minimo $m(\lambda)$ associato alla matrice \mathbf{A} . Se la matrice \mathbf{A} è diagonalizzabile, allora ammette m autovalori distinti λ_j ($j = 1, \dots, m$) che sono radici semplici del polinomio minimo. In questo caso i valori dei parametri γ_i si calcolano risolvendo il seguente sistema di m equazioni in m incognite:

$$f(\lambda_j) = \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \lambda_j^i \quad j = 1, \dots, m$$

Ponendo il sistema in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{m-1} \\ 1 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{bmatrix}$$

Risolvendo rispetto ai parametri γ_i si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_m) \end{bmatrix}$$

La matrice da invertire in questo caso è non singolare in quanto è una matrice di Vandermonde associata ad autovalori distinti.

Nel caso in cui nel polinomio minimo gli autovalori distinti λ_j abbiano grado di molteplicità r_j il sistema che si deve risolvere per determinare i parametri γ_i è il seguente

$$\begin{aligned} f(\lambda_j) &= \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \lambda^i \\ f'(\lambda_j) &= \sum_{i=0}^{m-1} i \gamma_i \lambda^{i-1} \\ &\vdots \\ f^{(r_i)}(\lambda_j) &= \sum_{i=0}^{m-1} i(i-1) \dots (i-r_i+1) \gamma_i \lambda^{i-r_i} \end{aligned}$$

Per ogni autovalore λ_j la forma matriciale che si ottiene è la seguente

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_j) \\ f'(\lambda_j) \\ f^{(2)}(\lambda_j) \\ \vdots \\ f^{(r_i)}(\lambda_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_j & \lambda_j^2 & \lambda_j^3 & \dots & \lambda_j^{m-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_j & 3\lambda_j^2 & \dots & (m-1)\lambda_j^{m-2} \\ 0 & 0 & 2 & 6\lambda_j & \dots & (m-1)(m-2)\lambda_j^{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1) \dots (m-r_i+1) \lambda_j^{m-r_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} \end{bmatrix}$$

Per esempio, nel caso di una matrice \mathbf{A} con due soli autovalori distinti λ_1 e λ_2 con molteplicità, rispettivamente, di ordine 2 e 3 nel polinomio minimo, il sistema da risolvere è il seguente

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f'(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ f'(\lambda_2) \\ f^{(2)}(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & 4\lambda_1^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6\lambda_1 & 12\lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_2^2 & 4\lambda_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso il sistema è risolubile in quanto la matrice da invertire è una matrice di Vandermonde generalizzata.

Esempio. Calcolare la seguente potenza di matrice:

$$\mathbf{A}^{1000} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{1000}$$

Il polinomio caratteristico della matrice è:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Sono presenti due autovalori distinti a molteplicità unitaria: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Il polinomio minimo coincide quindi con il polinomio caratteristico. Deve quindi potersi scrivere:

$$\mathbf{A}^{1000} = \sum_{i=0}^1 \gamma_i \mathbf{A}^i = \gamma_0 \mathbf{I}_1 + \gamma_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ -2\gamma_1 & \gamma_0 + 3\gamma_1 \end{bmatrix}$$

Sostituendo gli autovalori al posto di \mathbf{A} si ottiene il seguente sistema di due equazioni nelle due incognite γ_0 e γ_1 :

$$\begin{cases} \lambda_1^{1000} = \gamma_0 + \gamma_1 \lambda_1 \\ \lambda_2^{1000} = \gamma_0 + \gamma_1 \lambda_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1^{1000} \\ 2^{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

Risolvendo questo sistema lineare rispetto al vettore delle incognite si ottiene

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{1000} \\ 2^{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2^{1000} \\ 2^{1000} - 1 \end{bmatrix}$$

La potenza di matrice cercata ha quindi la seguente espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{1000} &= \begin{bmatrix} 2 - 2^{1000} & 2^{1000} - 1 \\ -2(2^{1000} - 1) & 2 - 2^{1000} + 3(2^{1000} - 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 2^{1000} & 2^{1000} - 1 \\ 2 - 2^{1001} & 2^{1001} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1.0715 & 1.0715 \\ -2.1430 & 2.1430 \end{bmatrix} 10^{301} \end{aligned}$$

Esempio. Data la matrice

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dimostrare che

$$e^{\mathbf{j}\omega t} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

Il polinomio minimo della matrice \mathbf{j} coincide con il polinomio caratteristico

$$m(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - j)(\lambda + j)$$

I valori di $\gamma_0(t)$ e $\gamma_1(t)$ della relazione

$$e^{\mathbf{j}\omega t} = \sum_{i=0}^1 \gamma_i(\mathbf{j}\omega t)^i = \gamma_0(t)\mathbf{I}_2 + \gamma_1(t)\mathbf{j}$$

si determinano risolvendo il seguente sistema

$$\begin{bmatrix} e^{j\omega t} \\ e^{-j\omega t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix}$$

Invertendo si ottiene

$$\begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2j} & -\frac{1}{2j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\omega t} \\ e^{-j\omega t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori trovati si ottiene

$$e^{\mathbf{j}\omega t} = \cos \omega t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \omega t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

Funzioni di matrice: interpretazione geometrica

Si consideri ora il caso di una matrice \mathbf{A} di ordine n caratterizzata da n autovettori \mathbf{v}_i linearmente indipendenti. Sia inoltre assegnata una funzione $f(\lambda)$ esprimibile in serie di potenze

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda^i$$

e sia $f(\mathbf{A})$ la corrispondente funzione matriciale

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mathbf{A}^i$$

Un possibile modo per ottenere una forma esplicita della funzione matriciale $f(\mathbf{A})$ è quello di operare una trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$ nello spazio degli stati che diagonalizzi la matrice \mathbf{A} . Le colonne della matrice \mathbf{T} vengono poste uguali agli autovettori \mathbf{v}_i della matrice \mathbf{A} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

Indicando con \mathbf{D} la matrice diagonale degli autovalori λ_i e con \mathbf{v}_i^{*T} le righe della matrice \mathbf{T}^{-1}

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{*T} \\ \mathbf{v}_2^{*T} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^{*T} \end{bmatrix}$$

si ottiene che la funzione $f(\mathbf{A})$ è esprimibile nel modo seguente

$$f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}) = \mathbf{T}f(\mathbf{D})\mathbf{T}^{-1} = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^{*T}$$

Le funzioni $f(\lambda_i)$ sono i *modi* della funzione matriciale $f(\mathbf{A})$.

Se $f(\lambda)$ è un esponenziale si ha che

$$f(\lambda) = e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^{*T}$$

Se $f(\lambda)$ è una potenza si ha che

$$f(\lambda) = \lambda^k \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^{*T}$$

È interessante notare che la matrice

$$\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^{*T} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

è la matrice di proiezione sul sottospazio $\text{span}[\mathbf{v}_i]$ lungo il sottospazio

$$\text{span} \left[\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_{i-1} \ \mathbf{v}_{i+1} \ \dots \ \mathbf{v}_n \right] = \ker[\mathbf{v}_i^{*T}]$$

Questo fatto dà un senso “geometrico” alle righe \mathbf{v}_i^{*T} di una generica matrice \mathbf{T}^{-1} : il vettore \mathbf{v}_i^* è perpendicolare al sottospazio generato da tutte le colonne della matrice \mathbf{T} esclusa la colonna i -esima. Come ogni altra matrice di proiezione su un sottospazio di dimensione 1, la matrice $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^{*T}$ ha rango unitario, ha un autovalore unitario e tutti gli altri autovalori nulli. Inoltre, il prodotto scalare dei due vettori \mathbf{v}_i e \mathbf{v}_i^* è unitario

$$\mathbf{v}_i^{*T} \mathbf{v}_i = 1$$

Esempio. Si faccia riferimento, nel caso bidimensionale, alla seguente matrice \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{*T} \\ \mathbf{v}_2^{*T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

