Forme canoniche

- Si consideri il seguente sistema dinamico SISO, lineare, invariante, caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1\times n}$ e $d_0 \in \mathbf{R}$:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\,u(t) \\ y(t) & = & \mathbf{c}\,\mathbf{x}(t) + d_0\,u(t) \end{array} \right.$$

  Il numero di parametri che caratterizzano la parte dinamica ($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$) di questo sistema è n^2+2n: gli n^2 parametri della matrice $\mathbf{A}$ e i $2n$ parametri dei due vettori $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

- Operando opportune trasformazioni di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{z}$ nello spazio degli stati è possibile ottenere rappresentazioni matematiche "diverse ma equivalenti" del sistema dinamico di partenza. Le rappresentazioni matematiche caratterizzate dal minor numero possibile di parametri significativi prendono tipicamente il nome di **forme canoniche**.

- Le forme canoniche di maggior interesse che verranno presentate di seguito sono le seguenti:
  - Forma canonica di controllabilità (o di controllo)
  - Forma canonica di osservabilità
  - Forma canonica di Jordan

- Altre due rappresentazioni matematiche di particolare interesse (perchè anch'esse minime in termini di numero di parametri) sono le seguenti:
  - La forma compagna di controllabilità (o di controllo)
  - La forma compagna di osservabilità

Forma compagna di controllo

- Sia dato il seguente sistema dinamico SISO:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &=& \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\,u(t) \\ y(t) &=& \mathbf{c}\,\mathbf{x}(t) + d_0\,u(t) \end{cases}$$

- Se la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R}^+ = \left[\ \mathbf{b},\ \mathbf{A}\mathbf{b},\ \mathbf{A}^2\mathbf{b},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\ \right]$$

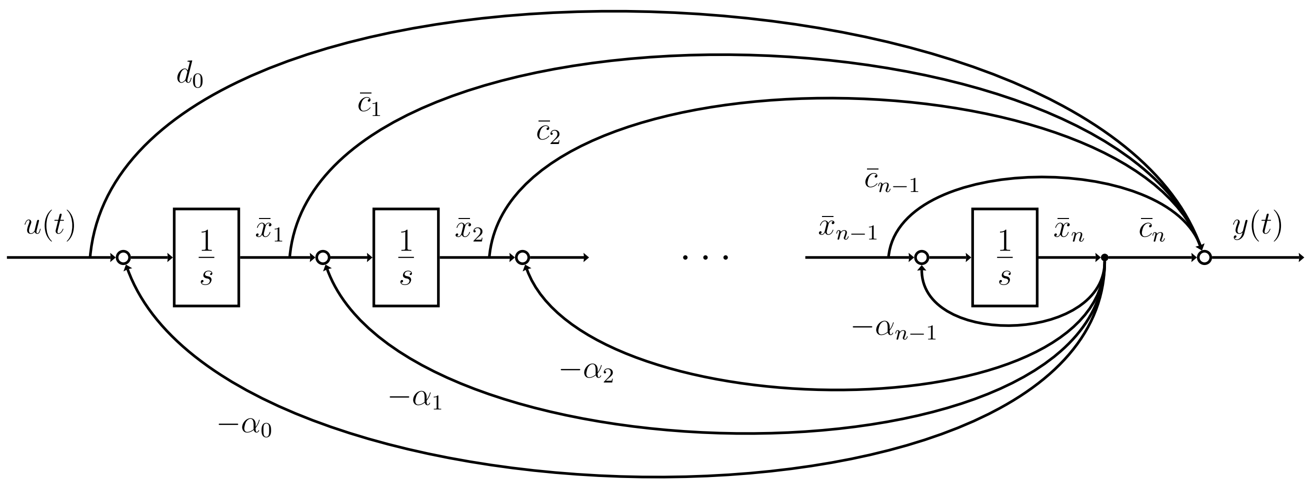
è invertibile, allora utilizzando la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\overline{\mathbf{x}}$ con $\mathbf{T} = \mathcal{R}^+$, il sistema trasformato assume la seguente **forma compagna di controllo**:

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) &=& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &=& [\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \ldots, \bar{c}_{n-1},\ \bar{c}_n\ ]\,\overline{\mathbf{x}}(t) \ + \ d_0\,u(t) \end{cases}$$

dove gli α_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

- Schema a blocchi del sistema in forma compagna di controllo:



- <u>Dimostrazione.</u> Se la matrice $\mathcal{R}^+$ è invertibile, allora i seguenti vettori

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b},\ \mathbf{A}\mathbf{b},\ \mathbf{A}^2\mathbf{b},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\}$$

sono linearmente indipendenti e $\mathcal{B}$ è una base dello spazio degli stati.

- Si indichi con $\mathbf{p}_i$ il vettore i-esimo della base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}, \qquad\qquad i = 1,\ \ldots,\ n$$

Rispetto alla base $\mathcal{B}$, il vettore $\mathbf{p}_{n+1}$ assume la forma

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{b} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1}\mathbf{p}_i = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{A}^i\mathbf{b}$$

da cui, posto $\alpha_n = 1$, si ricava che

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{o} \qquad \rightarrow \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbf{A}^i\mathbf{b} = \mathbf{o}$$

- Si applichi ora al sistema la seguente trasformazione di coordinate

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{T} = [\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2,\ \ldots,\ \mathbf{p}_n]$$

- Il sistema trasformato che si ottiene è il seguente

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) & = & \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{b}}\,u(t) \\ y(t) & = & \overline{\mathbf{c}}\,\overline{\mathbf{x}}(t) + d_0\,u(t) \end{array} \right.$$

- La struttura della matrice $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ è la seguente:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathbf{A}} & = & \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}[\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2,\ \ldots,\ \mathbf{p}_n] \\
& = & \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{A}\mathbf{p}_1,\ \mathbf{A}\mathbf{p}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}\mathbf{p}_n] \\
& = & \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{p}_2,\ \mathbf{p}_3,\ \ldots,\ \mathbf{p}_{n+1}] \\
& = & \mathbf{T}^{-1}\left[\mathbf{p}_2,\ \mathbf{p}_3,\ \ldots,\ -\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i-1}\mathbf{p}_i\right] \\
& = & \left[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{p}_2,\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{p}_3,\ \ldots,\ -\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{p}_i\right] \\
& = & \left[\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3,\ \ldots,\ -\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i-1}\mathbf{e}_i\right] = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{array}\right]
\end{array}$$

- Infatti, la matrice $\mathbf{T}^{-1}$ trasforma un vettore $\mathbf{p}_i$ espresso nella vecchia base nel corrispondente vettore $\mathbf{e}_i$ nella nuova base

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{p}_i$$

  Essendo $\mathbf{p}_i$ un vettore della nuova base, necessariamente il suo trasformato $\mathbf{e}_i$ è l'i-esimo elemento della base canonica.

- Rispetto alla nuova base i vettori $\overline{\mathbf{b}}$ e $\overline{\mathbf{c}}$ assumono la seguente forma:

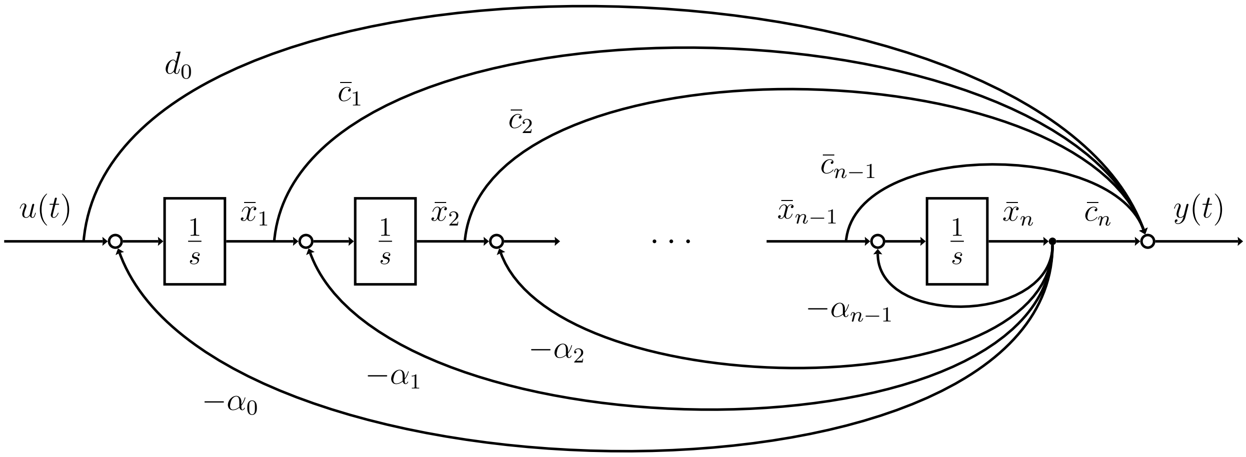
$$\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{T} = [\bar{c}_1,\ \bar{c}_2,\ \ldots,\ \bar{c}_n]$$

  Il numero dei parametri della nuova rappresentazione matematica del sistema di partenza è $2n$.

- Calcoliamo ora il polinomio caratteristico della matrice $\overline{\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{\mathbf{A}}} &= \det(s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}) = \Delta_{\mathbf{A}} \\
&= \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & s & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & s & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= s \begin{vmatrix} s & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ -1 & s & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & s & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & s+\alpha_{n-1} \end{vmatrix}}_{\alpha_0(-1)^n(-1)^{n-2} = \alpha_0} \\
&= s(s(\ldots s(s+\alpha_{n-1}) + \ldots + \alpha_2) + \alpha_1) + \alpha_0 \\
&= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0
\end{aligned}$$

- Applicando la formula di Mason allo schema a blocchi del sistema posto in forma compagna di controllo si può facilmente verificare che il determinante del grafo coincidere, a meno di una costante, con il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.



$$\begin{aligned}
\Delta(s) &= 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{s} + \frac{\alpha_{n-2}}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_1}{s^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{s^n} \\
&= \frac{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^n}
\end{aligned}$$

- In base alla formula di Mason, al numeratore delle funzione di trasferimento compare la seguente espressione

$$\begin{aligned}
N(s) &= \frac{\bar{c}_1}{s}\frac{(s^{n-1} + \alpha_{n-1}s^{n-2} + \alpha_{n-2}s^{n-3} + \ldots + \alpha_2 s + \alpha_1)}{s^{n-1}} \\
&\quad + \frac{\bar{c}_2}{s^2}\frac{(s^{n-2} + \alpha_{n-1}s^{n-3} + \alpha_{n-3}s^{n-4} + \ldots + \alpha_2)}{s^{n-2}} \\
&\quad + \frac{\bar{c}_3}{s^3}\frac{(s^{n-3} + \alpha_{n-1}s^{n-4} + \ldots + \alpha_3)}{s^{n-3}} + \ldots + \frac{\bar{c}_n}{s^n} \\
&= \frac{[\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ \bar{c}_3\ \ldots\ \bar{c}_n]}{s^n} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \vdots & \ldots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \vdots & \alpha_{n-1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \alpha_{n-1} & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_\alpha} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \vdots \\ s^{n-2} \\ s^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}} \\
&= \frac{\bar{\mathbf{c}}\mathbf{T}_\alpha \mathbf{s}}{s^n} = \frac{\mathbf{c}(\mathbf{T}\mathbf{T}_\alpha)\mathbf{s}}{s^n}
\end{aligned}$$

- La funzione di trasferimento $G(s)$ dello schema a blocchi presentato è

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = d_0 + \frac{N(s)}{\Delta(s)} = d_0 + \frac{\bar{\mathbf{c}}\mathbf{T}_\alpha \mathbf{s}}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Forma canonica di controllo

- Sia dato il seguente sistema dinamico SISO:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\,u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\,\mathbf{x}(t) + d_0\,u(t) \end{cases}$$

- Se la matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$ è invertibile

$$\mathcal{R}^+ = \left[\ \mathbf{b},\ \mathbf{A}\mathbf{b},\ \mathbf{A}^2\mathbf{b},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\ \right]$$

la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathcal{R}^+\,\mathbf{T}_\alpha\,\mathbf{x}_c = \mathbf{T}_c\,\mathbf{x}_c$ dove:

$$\mathbf{T}_c = \left[\ \mathbf{b},\ \mathbf{A}\mathbf{b},\ \mathbf{A}^2\mathbf{b},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\ \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \vdots & \ldots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \vdots & \alpha_{n-1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \alpha_{n-1} & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

porterà il sistema ad assumere la seguente *forma canonica di controllo* :

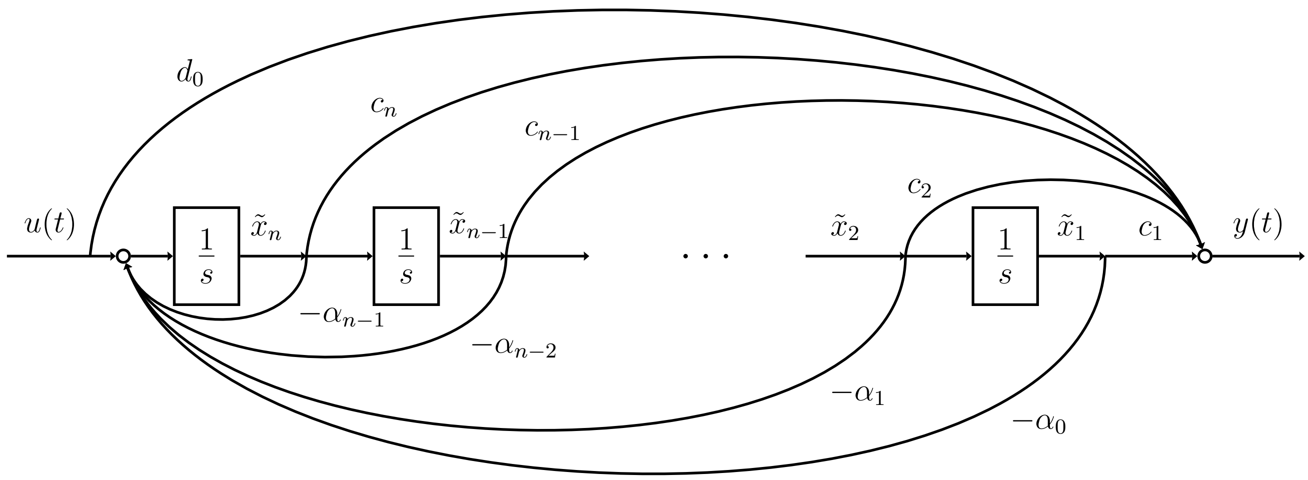
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \left[\ c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \ldots \quad c_n\ \right] \mathbf{x}_c(t) + d_0\,u(t) \end{cases}$$

dove gli α_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

- Il vettore di stato: $\mathbf{x}_c = \left[\ \tilde{x}_1\ \ \tilde{x}_2\ \ \tilde{x}_3\ \ \ldots\ \ \tilde{x}_n\ \right]^T$.

- Lo schema a blocchi corrispondente alla forma canonica di controllo è il seguente



- In base alla formula di Mason, il determinante $\Delta(s)$ di questo grafo è

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{s} + \frac{\alpha_{n-2}}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_0}{s^n} \\ &= \frac{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^n}\end{aligned}$$

- Al numeratore della formula di Mason si ha l'espressione

$$N(s) = d_0\Delta(s) + \frac{c_n s^{n-1} + c_{n-1}s^{n-2} + c_{n-2}s^{n-3} + \ldots + c_2 s + c_1}{s^n}$$

- La funzione di trasferimento $G(s) = Y(s)/U(s)$ dello schema a blocchi è quindi la seguente

$$G(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)} = d_0 + \frac{c_n s^{n-1} + c_{n-1}s^{n-2} + c_{n-2}s^{n-3} + \ldots + c_2 s + c_1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

- Si noti che vi è una corrispondenza biunivoca diretta tra tra i coefficienti c_i ed α_i della funzione di trasferimento $G(s)$ e i coefficienti del sistema posto in forma canonica di controllo.

Forma compagna di osservabilità

- Sia dato il seguente sistema dinamico SISO:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\,u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\,\mathbf{x}(t) + d_0\,u(t) \end{cases}, \qquad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}$$

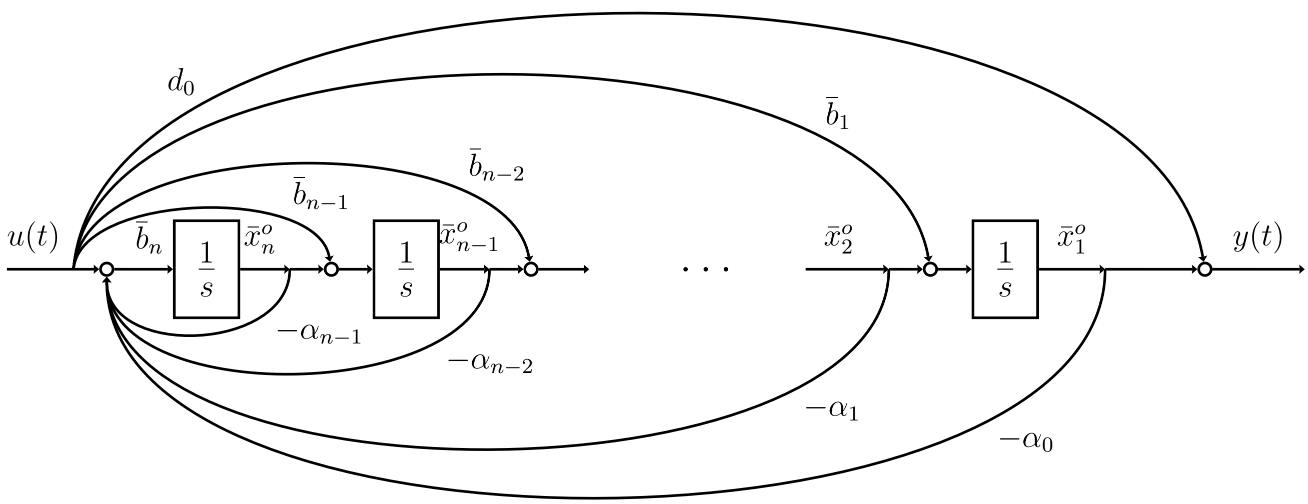
- Se la matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$ è invertibile, allora utilizzando la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\overline{\mathbf{x}}$ con $\mathbf{T} = (\mathcal{O}^-)^{-1}$, il sistema trasformato assume la seguente **forma compagna di osservabilità**:

$$\begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1^o \\ \bar{x}_2^o \\ \bar{x}_3^o \\ \vdots \\ \bar{x}_{n-1}^o \\ \bar{x}_n^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-1} \\ \bar{b}_n \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_o(t) + d_0\,u(t) \end{cases}$$

dove gli α_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

- Schema a blocchi del sistema in forma compagna di osservabilità:



Forma canonica di osservabilità

- Sia dato il seguente sistema dinamico SISO:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\,u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\,\mathbf{x}(t) + d_0\,u(t) \end{cases}, \qquad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Se la matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$ è invertibile, allora la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = (\mathbf{T}_\alpha\,\mathcal{O}^-)^{-1}\,\mathbf{x}_o = \mathbf{T}_o\,\mathbf{x}_o$ dove:

$$\mathbf{T}_o = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

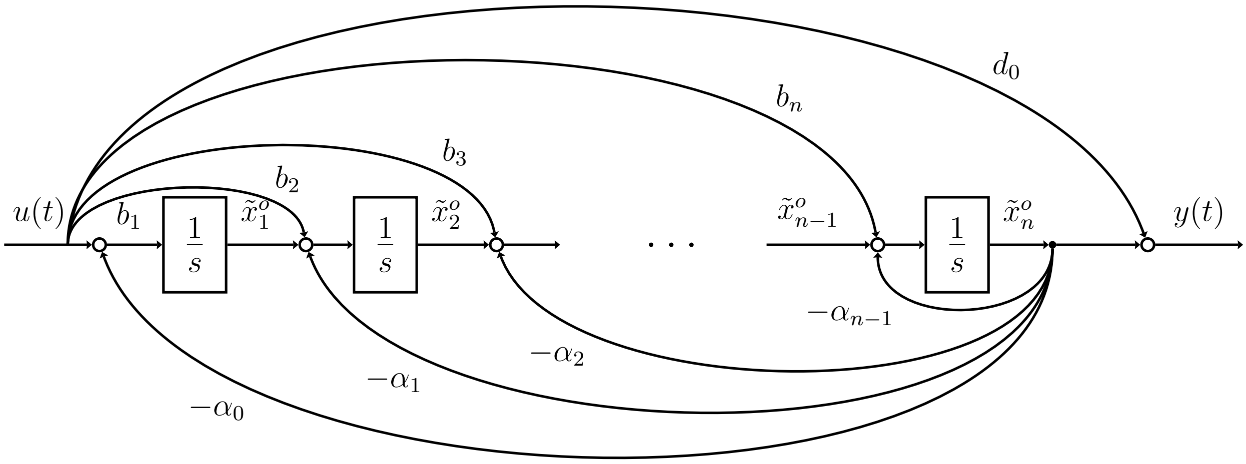
porterà il sistema ad assumere la seguente _forma canonica di osservabilità_ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^o \\ \tilde{x}_2^o \\ \tilde{x}_3^o \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1}^o \\ \tilde{x}_n^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) + d_0\,u(t) \end{cases}$$

dove gli α_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

- Lo schema a blocchi corrispondente alla forma canonica di osservabilità è il seguente



- In base alla formula di Mason, il determinante $\Delta(s)$ di questo grafo è

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= 1 + \frac{\alpha_{n-1}}{s} + \frac{\alpha_{n-2}}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_0}{s^n} \\ &= \frac{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^n}\end{aligned}$$

- Al numeratore della formula di Mason si ha l'espressione

$$N(s) = d_0\Delta(s) + \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1}s^{n-2} + b_{n-2}s^{n-3} + \ldots + b_2 s + b_1}{s^n}$$

- La funzione di trasferimento $G(s) = Y(s)/U(s)$ dello schema a blocchi è quindi la seguente

$$G(s) = \frac{N(s)}{\Delta(s)} = d_0 + \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1}s^{n-2} + b_{n-2}s^{n-3} + \ldots + b_2 s + b_1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

- Si noti che vi è una corrispondenza biunivoca diretta tra tra i coefficienti b_i ed α_i della funzione di trasferimento $G(s)$ e i coefficienti del sistema posto in forma canonica di osservabilità.