Forma standard di raggiungibilità

- *Proprietà. Ogni sistema lineare $\mathcal{S} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ (continuo o discreto) non completamente raggiungibile può essere portato in forma "standard di raggiungibilità", cioè è algebricamente equivalente ad un sistema $\overline{\mathcal{S}} = \{\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}}, \overline{\mathbf{D}}\}$ dove le matrici $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$, $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$ e $\overline{\mathbf{D}}$ hanno la seguente struttura:*

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{1,1} & \overline{\mathbf{A}}_{1,2} \\ 0 & \overline{\mathbf{A}}_{2,2} \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \overline{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

- *Posto $\rho = dim \mathcal{X}^+ < n$, la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ che porta il sistema in forma standard di raggiungibilità ha la seguente struttura:*

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1,\ \mathbf{T}_2], \qquad \mathbf{x} = \mathbf{T}\,\overline{\mathbf{x}}$$

  dove $\mathbf{T}_1$, di dimensione $n \times \rho$, è una matrice di base del sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$, e dove $\mathbf{T}_2$, di dimensione $n \times (n-\rho)$, è una qualunque matrice che rende non singolare la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$.

- *Proprietà. Il sottosistema di dimensione ρ caratterizzato dalle matrici $\overline{\mathbf{A}}_{1,1}$ e $\overline{\mathbf{B}}_1$ è completamente raggiungibile.*

- Il sottosistema $(\overline{\mathbf{A}}_{1,1},\ \overline{\mathbf{B}}_1,\ \overline{\mathbf{C}}_1)$, detto *sottosistema raggiungibile*, rappresenta integralmente la dinamica del sistema originario quando lo stato iniziale appartiene al sottospazio raggiungibile:

$$\text{se} \quad \mathbf{x}_2(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x}_2(t) = 0, \qquad \forall t \geq 0$$

- Il sottosistema $(\overline{\mathbf{A}}_{2,2},\ 0,\ \overline{\mathbf{C}}_2)$, caratterizzato dalle matrici $\overline{\mathbf{A}}_{2,2}$, $\overline{\mathbf{B}}_2 = 0$, e $\overline{\mathbf{C}}_2$, detto *sottosistema non raggiungibile*, ha una dinamica che dipende solo dallo stato iniziale $\overline{\mathbf{x}}_2(0)$ e non è influenzato dall'ingresso.

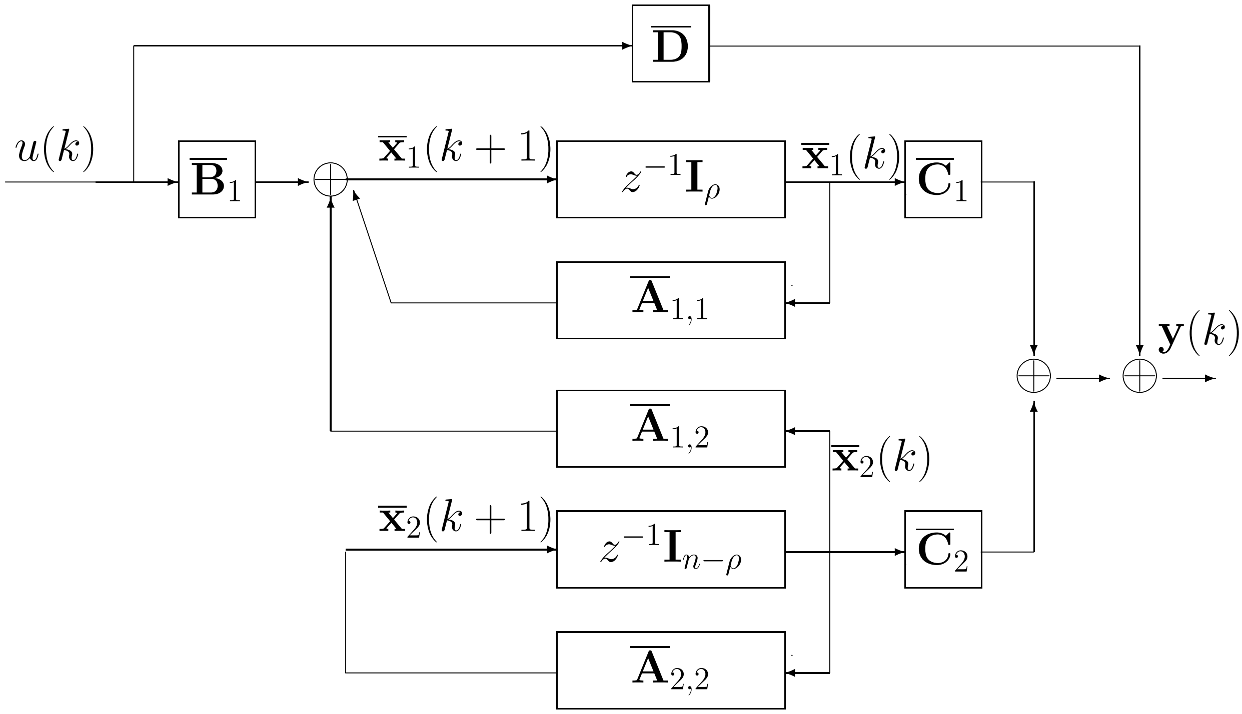
- Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ vengono suddivisi in due gruppi: gli autovalori della parte raggiungibile (quelli della matrice $\overline{\mathbf{A}}_{1,1}$) e gli autovalori della parte non raggiungibile (quelli della matrice $\overline{\mathbf{A}}_{2,2}$).

- Agendo sugli ingressi non è possibile modificare in nessun modo la dinamica della parte non raggiungibile del sistema.

- Nel caso discreto, consideriamo il vettore di stato $\overline{\mathbf{x}}(k)$ partizionato in due parti: la componente *raggiungibile* $\overline{\mathbf{x}}_1$ e quella *non raggiungibile* $\overline{\mathbf{x}}_2$: $\overline{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{cc} \overline{\mathbf{x}}_1 & \overline{\mathbf{x}}_2 \end{array}\right]^T$, dove $dim\, \overline{\mathbf{x}}_1 = \rho$. Le equazioni del sistema sono:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{x}}_1(k+1) = & \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\overline{\mathbf{x}}_1(k) + & \overline{\mathbf{A}}_{1,2}\overline{\mathbf{x}}_2(k) + & \overline{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(k) \\ \overline{\mathbf{x}}_2(k+1) = & & \overline{\mathbf{A}}_{2,2}\overline{\mathbf{x}}_2(k) & \\ \mathbf{y}(k) = & \overline{\mathbf{C}}_1\overline{\mathbf{x}}_1(k) + & \overline{\mathbf{C}}_2\overline{\mathbf{x}}_2(k) + & \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

  Il corrispondente schema a blocchi è:



- Una analoga scomposizione vale anche per sistemi a tempo continuo.

- <u>*Proprietà*</u>. *La matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ [o $\mathbf{H}(s)$] di un sistema dinamico lineare, coincide con la matrice di trasferimento della sola parte* raggiungibile.

  <u>Prova</u>. la matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \overline{\mathbf{C}}(z\mathbf{I}-\overline{\mathbf{A}})^{-1}\overline{\mathbf{B}}$ vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= \left[\begin{array}{cc} \overline{\mathbf{C}}_1 & \overline{\mathbf{C}}_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} z\mathbf{I}-\overline{\mathbf{A}}_{1,1} & -\overline{\mathbf{A}}_{1,2} \\ 0 & z\mathbf{I}-\overline{\mathbf{A}}_{2,2} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{array}\right] = \\ &= \left[\begin{array}{cc} \overline{\mathbf{C}}_1 & \overline{\mathbf{C}}_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} (z\mathbf{I}-\overline{\mathbf{A}}_{1,1})^{-1} & ****\\ 0 & (z\mathbf{I}-\overline{\mathbf{A}}_{2,2})^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{array}\right] = \\ &= \overline{\mathbf{C}}_1(z\mathbf{I}-\overline{\mathbf{A}}_{1,1})^{-1}\overline{\mathbf{B}}_1 \end{aligned}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema discreto:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} u(k) \\ y(k) & = & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k) \end{array}\right.$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathcal{R}^+ = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots\; 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots\; 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots\; 0 & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \vdots\; 0 & \vdots & \vdots \end{array}\right], \qquad \mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è completamente raggiungibile per cui è possibile portare il sistema in forma standard di raggiungibilità. Utilizzando la seguente matrice:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}$$

il sistema trasformato assume la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \bar{\mathbf{x}}(k+1) & = & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] u(k) \\ y(k) & = & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}}(k) \end{array}\right.$$

Gli zeri indicati in grassetto sono quelli strutturali della forma standard di raggiungibilità. La parte non raggiungibile è caratterizzata da un autovalore nullo. La matrice di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ del sistema complessivo coincide con quella della sola parte raggiungibile:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}_1(z\mathbf{I}-\mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{B}_1 \\ &= \mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (z-1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & z^{-2} \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ &= \begin{bmatrix} (z-1)^{-1} & z^{-1} & (z^{-1}+z^{-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-1} & \dfrac{z+1}{z^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$