Forma canonica di controllo

- Si faccia riferimento al seguente sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{b},\, \mathbf{C},\, \mathbf{d})$ lineare, invariante e ad un solo ingresso:

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\,u(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}\,u(t) \end{cases}$$

- Proprietà. *Il sistema* $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\, \mathbf{b},\, \mathbf{C},\, \mathbf{d})$ *è raggiungibile* se e solo se *è algebricamente equivalente ad un sistema* $\mathcal{S}_c = (\mathbf{A}_c,\, \mathbf{b}_c,\, \mathbf{C}_c,\, \mathbf{d}_c)$ *in* forma canonica di controllo (o di raggiungibilità), *cioè un sistema dove le matrici* $\mathbf{A}_c$ *e* $\mathbf{b}_c$ *hanno la struttura:*

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

e dove i parametri $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, *sono i coefficienti del polinomio caratteristico* monico *della matrice* $\mathbf{A}$*:*

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_0$$

- La trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{x}_c$ che porta il sistema (1) nella forma canonica di controllo è caratterizzata dalla seguente matrice

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}$$

dove $\mathcal{R}^+$ è la matrice di raggiungibilità del sistema (1) e dove $(\mathcal{R}_c^+)^{-1}$ è una matrice che ha la seguente struttura:

$$(\mathcal{R}_c^+)^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$