Modello matematico di un sistema fisico

- La costruzione del modello matematico è anche un procedimento che permette di comprendere a pieno il fenomeno fisico che si vuol descrivere.
- Compromesso fra la semplicità del modello e la precisione nella descrizione del fenomeno fisico.
- Lo stesso fenomeno fisico può essere descritto mediante modelli matematici diversi. Esempio: dinamica di una popolazione.
  - Equazione di Maltus (modello lineare):

    $$\dot{x}(t) = r\,x(t) \quad \Downarrow \quad x(t) = x_0 e^{rt}$$

    $x(t)$: densità della popolazione
    r: tasso di crescita
    x_0: densità all'istante $t = 0$

    Modello valido solamente se la densità è sufficientemente elevata da poter considerare "continuo" il fenomeno e se non vi sono limitazioni sulle risorse ambientali.
  - Equazione logistica di Verhulst (modello non lineare):

    $$\dot{x}(t) = r\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

    dove K rappresenta la capacità portante del sistema.
  - Per poter descrivere fenomeni come la depensazione critica:

    $$\dot{x}(t) = r\left[-a + bx(t) - cx^2(t)\right]x(t)$$

  - Sono tutti modelli dinamici tempo-continuo

Modello termico di un edificio

- Modello statico:

$$Q = K(\theta - \theta_e)$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \theta_e + \frac{Q}{K}$$

Q : potenza termica erogata (calore nell'unità di tempo)
θ : temperatura dell'edificio;
θ_e : temperatura esterna;
K : conduttività termica
c : capacità termica

- Modello dinamico lineare tempo-continuo:

$$Q\,dt = c\,d\theta + K(\theta - \theta_e)dt$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\theta} = \frac{Q}{c} - \frac{K}{c}\,(\theta - \theta_e)$$

Esempio di modello dinamico discreto

- Modello tempo-invariante:

$$v(k+1) = i\;v(k) + u(k)$$

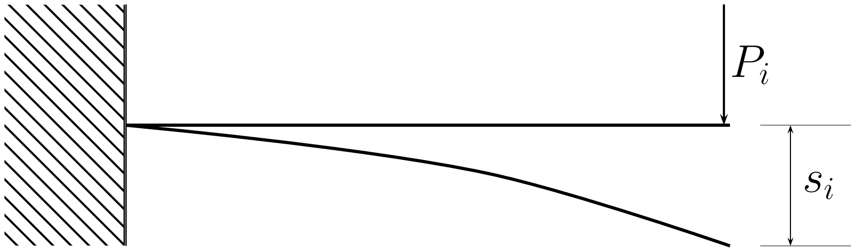
$v(k)$: valore del capitale alla fine del periodo k;
i : tasso di interesse;
$u(k)$: versamenti nel periodo k;

- Modello tempo-variante:

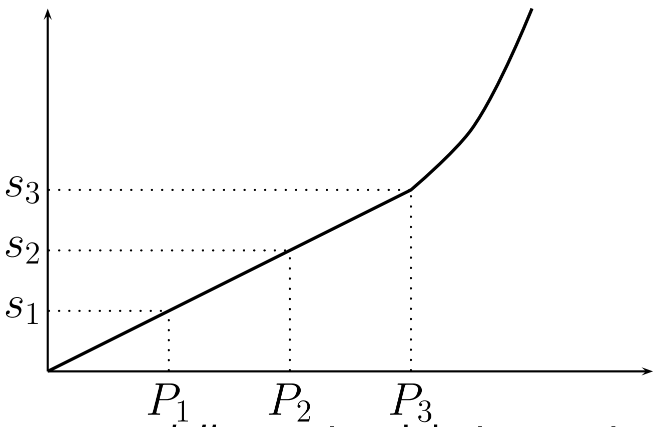
$$v(k+1) = i(k)v(k) + u(k)$$

dove $i(k)$ è il tasso di interesse nel periodo k.

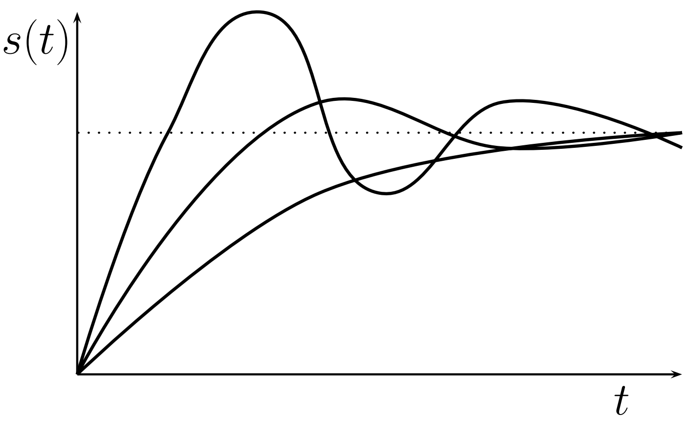
Esempio. Si consideri una trave fissata ad una estremità e si supponga di caricare l'estremità libera con forze costanti di entità pari a P_1, P_2, ...



Quando si applica la forza P_i, la trave si flette e, dopo un transitorio, si ferma nella posizione s_i. Riportando in un grafico i valori dello spostamento s in funzione del carico P si ottiene un andamento che, nella sua parte lineare, coincide con la legge di Hook

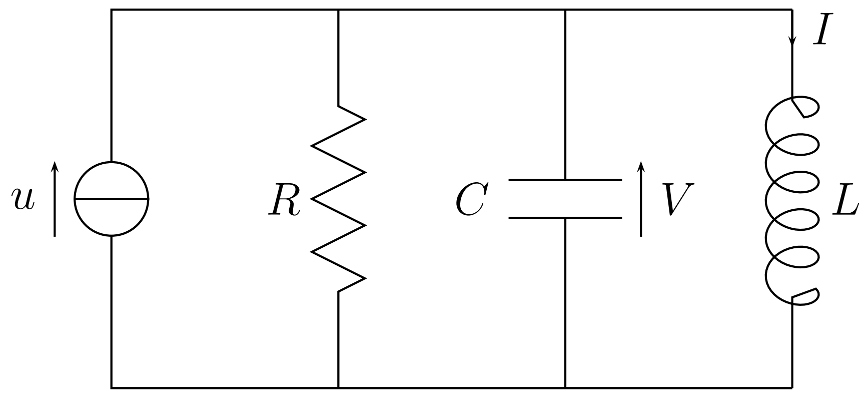


Tale curva costituisce un *modello statico* del sistema in quanto non fornisce alcuna informazione sulla dinamica con cui l'estremità libera passa da una posizione di equilibrio all'altra.



Solo un *modello dinamico* è in grado di fornire informazioni sul tipo di transitorio che caratterizza il sistema.

Esempio. Si consideri la seguente rete elettrica:



Per determinare il modello dinamico di questo sistema si procede ad assegnare una variabile di stato ad ogni elemento dinamico del sistema, cioè ad ogni elemento che è in grado di accumulare energia.

$$Q = C\,V, \qquad \Phi = LI$$

Le equazioni dinamiche del sistema sono:

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = C\dot{V} = u - I - \dfrac{V}{R} \\ \dfrac{d\Phi}{dt} = L\dot{I} = V \end{cases}$$

Indicando con $\mathbf{x}$ il vettore di stato

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{I} \end{bmatrix}$$

le equazioni dinamiche del sistema possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

In questo caso, quindi, il sistema è lineare tempo-invariante.

Si supponga ora di voler tener conto nel modello del fatto che la resistenza varia al variare della temperatura: $R = R(\theta)$. In questo caso occorre aggiungere al sistema anche la seguente equazione differenziale che descrive la dinamica termica della resistenza:

$$\dot{\theta} = \frac{V^2}{cR} - \frac{G}{c}\theta + \frac{G}{c}\theta_e$$

I parametri hanno il seguente significato

$$\begin{cases} \theta & \text{temperatura della resistenza} \\ \theta_e & \text{temperatura esterna} \\ c & \text{capacità termica della resistenza} \\ G & \text{conduttanza termica della resistenza} \end{cases}$$

Le equazioni dinamiche del sistema sono ora le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{V} &= \dfrac{u}{C} - \dfrac{I}{C} - \dfrac{V}{C\,R(\theta)} \\ \dot{I} &= \dfrac{V}{L} \\ \dot{\theta} &= \dfrac{V^2}{c\,R(\theta)} - \dfrac{G}{c}\theta + \dfrac{G}{c}\theta_e \end{cases}$$

Indicando con $\overline{\mathbf{x}}$ e $\overline{\mathbf{u}}$ il vettore di stato e di uscita:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} V \\ I \\ \theta \end{bmatrix}, \qquad \rightarrow \qquad \overline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u \\ \theta_e \end{bmatrix}$$

il sistema può essere descritto in forma compatta nel modo seguente:

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}})$$

Il sistema è ora non lineare tempo invariante.