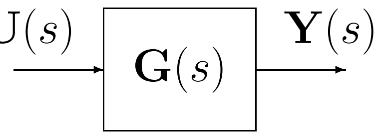
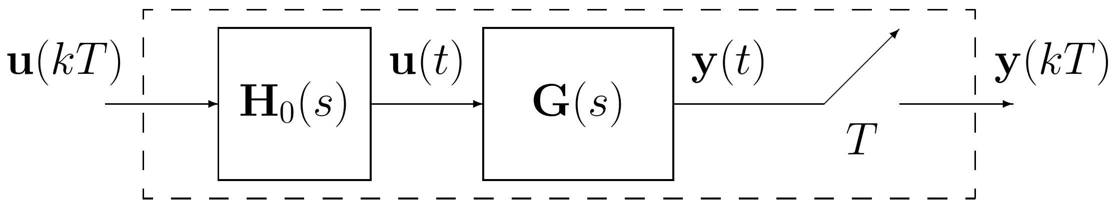
Discretizzazione di un sistema tempo continuo

Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\mathbf{G}(s): \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

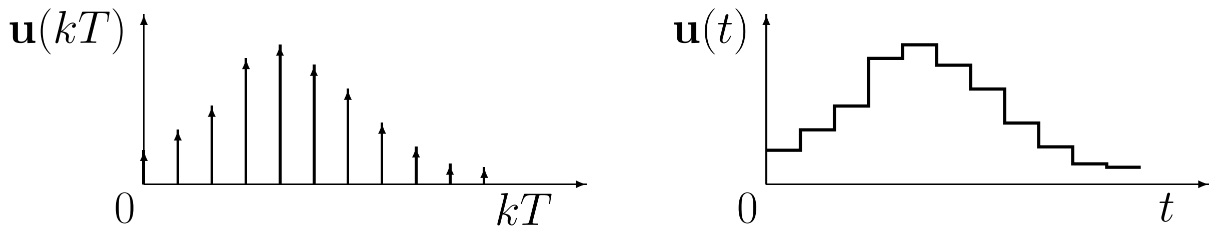


Se si inserisce un ricostruttore di ordine zero $\mathbf{H}_0(s)$ e un campionatore ideale di periodo T, rispettivamente a monte e a valle del sistema continuo $\mathbf{G}(s)$, si ottiene il seguente sistema tempo discreto:



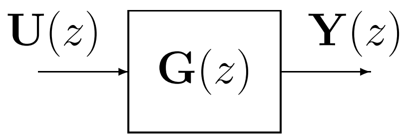
Essendo all'uscita del ricostruttore $\mathbf{H}_0(s)$, il segnale $\mathbf{u}(t)$ è continuo a tratti:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) \qquad \text{per} \qquad kT \leq t \leq (k+1)T$$



Il segnale $\mathbf{y}(t)$ campionato con periodo T genera il segnale discreto $\mathbf{y}(kT)$. Il comportamento ingresso-uscita del sistema complessivo è quello di un sistema tempo discreto:

$$\mathbf{G}(z): \begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T) &= \mathbf{F}\,\mathbf{x}(kT) + \mathbf{G}\,\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) &= \mathbf{H}\,\mathbf{x}(kT) \end{cases}$$



Il legame tra le matrici $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ e le matrici $(\mathbf{F},\ \mathbf{G},\ \mathbf{H})$ è quindi il seguente:

$$\boxed{\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}\,T}, \qquad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}}$$

Prova. Esiste un preciso legame tra le matrici $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ e le matrici $(\mathbf{F},\ \mathbf{G},\ \mathbf{H})$. Tale legame si determina risolvendo la seguente equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$$

nell'intervallo di tempo $[kT,\ (k+1)T]$. Lo stato $\mathbf{x}(t)$ che si raggiunge a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(kT)$ all'istante $t = kT$ è:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-kT)}\,\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\gamma)}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\gamma)\,d\gamma$$

Essendo l'ingresso costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT)$, lo stato $\mathbf{x}((k+1)T)$ che si raggiunge all'istante $t = (k+1)T$ è quindi il seguente:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}((k+1)T) &= \underbrace{e^{\mathbf{A}T}}_{\mathbf{F}}\,\mathbf{x}(kT) + \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\gamma)}\mathbf{B}\,d\gamma}_{\mathbf{G}}\ \mathbf{u}(kT)\\ &= \mathbf{F}\,\mathbf{x}(kT) + \mathbf{G}\,\mathbf{u}(kT)\end{aligned}$$

Operando il seguente cambiamento di variabile:

$$\sigma = (k+1)T - \gamma \qquad \rightarrow \qquad d\sigma = -d\gamma$$

la matrice $\mathbf{G}$ può essere trasformata come segue:

$$\mathbf{G} = \int_{T}^{0} e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,(-d\sigma) = \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma$$

L'uscita $\mathbf{y}(kT)$ si ottiene da $\mathbf{y}(t)$ campionando all'istante $t = kT$:

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{y}(t)|_{t=kT} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)|_{t=kT} = \underbrace{\mathbf{C}}_{\mathbf{H}}\,\mathbf{x}(kT)$$

Il sistema $\mathbf{G}(z)$ che si ottiene da $\mathbf{G}(s)$ nel modo precedentemente descritto prende il nome di *sistema a segnali campionati*

Il comando che in ambiente Matlab permette di convertire un sistema SYS tempo continuo nel suo corrispondente sistema discreto SYSD è il seguente:

```
SYSD = C2D(SYS,Tsamp,'zoh')
```

dove Tsamp è il periodo di campionamento che si desidera utilizzare. I metodi di discretizzazione che di possono utilizzare sono i seguenti:

```
'zoh'       Zero-order hold on the inputs.
'foh'       Linear interpolation of inputs (triangle appx.)
'tustin'    Bilinear (Tustin) approximation.
'prewarp'   Tustin approximation with frequency prewarping.
            The critical frequency Wc is specified as fourth
            input by C2D(SYSC,TS,'prewarp',Wc).
'matched'   Matched pole-zero method (for SISO systems only).
```