Criteri di stabilità per sistemi non lineari

- *Primo criterio di Lyapunov* (metodo ridotto): L'analisi della stabilità di un punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ viene ricondotta allo studio della stabilità del corrispondente sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio.
- *Secondo criterio di Lyapunov* (metodo diretto): L'analisi della stabilità di un punto di equilibrio viene fatta utilizzando, oltre alle equazioni di stato del sistema, opportune funzioni scalari, dette *funzioni di Lyapunov*, definite sullo spazio degli stati.

Primo criterio di Lyapunov

- Criterio "ridotto" di Lyapunov. Sia dato il seguente sistema non lineare "tempo-continuo" *["tempo-discreto"]*:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \qquad [\ \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))\ ]$$

e nell'intorno del punto di equilibrio $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ si faccia riferimento al corrispondente sistema linearizzato:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\,\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\,\tilde{\mathbf{u}}(t) \qquad [\ \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\,\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\,\tilde{\mathbf{u}}(k)\ ]$$

Per i due sistemi considerati, valgono le seguenti affermazioni:

1) Se tutti gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ hanno "parte reale negativa" *["modulo minore di 1"]*, allora il punto di equilibrio $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ è asintoticamente stabile anche per il sistema non lineare.
2) Se anche uno solo degli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ ha "parte reale positiva" *["modulo maggiore di 1"]*, allora il punto di equilibrio $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ è instabile anche per il sistema non lineare.
3) Se almeno un autovalore della matrice $\mathbf{A}$ si trova "sull'asse immaginario" *["sul cerchio unitario"]* mentre tutti gli altri autovalori sono asintoticamente stabili, allora non è possibile concludere nulla sulla stabilità o meno del punto di equilibrio $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ per il sistema non lineare. (In questo caso il criterio non è efficace).

Example. Consideriamo i seguenti tre sistemi non lineari "autonomi" (senza ingresso):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 + x_2^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 \end{cases}$$

Si può facilmente che l'origine $\mathbf{x}_0 = 0$ è un punto di equilibrio per tutti e tre i sistemi. Le matrici jacobiane dei tre sistemi hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ -3x_1^2 & 3x_2^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}$$

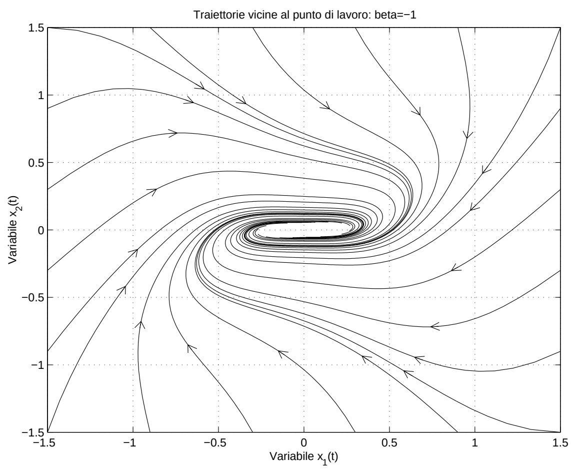
Calcolando le matrice jacobiane nell'origine, si ottiene la stessa matrice $\mathbf{A}$ per il corrispondente sistema linearizzato:

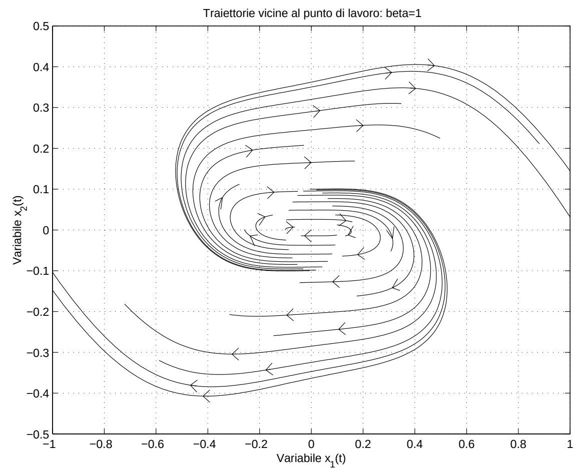
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

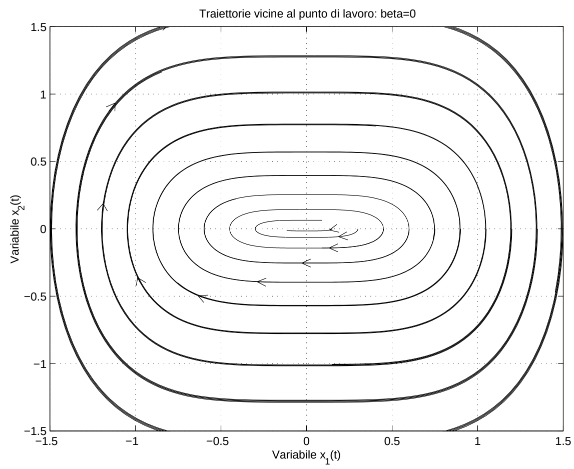
Tale matrice ha due autovalori nell'origine per cui il criterio ridotto di Lyapunov non può essere utilizzato. Se invece si utilizza la funzione di Lyapunov $V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^2$ e si calcola la sua derivata lungo le traiettorie dei tre sistemi non lineari si ottiene che

$$\dot{V} = -4x_1^6 - 4x_2^4 < 0, \qquad \dot{V} = 4x_1^6 + 4x_2^4 > 0, \qquad \dot{V} = 0$$

ed applicando il criterio "diretto" di Lyapunov è possibile affermare che in $\mathbf{x}_0 = 0$ il primo sistema è asintoticamente stabile, il secondo sistema è instabile e il terzo sistema è semplicemente stabilità (vedi files "ese_pr0.m" e "ese_pr0_ode.m"):







Funzioni definite positive

- L'enunciato del metodo "diretto" di Lyapunov fa riferimento ad opportune funzioni scalari "definite positive" o "semidefinite positive", che spesso hanno il significato di "funzioni energia".

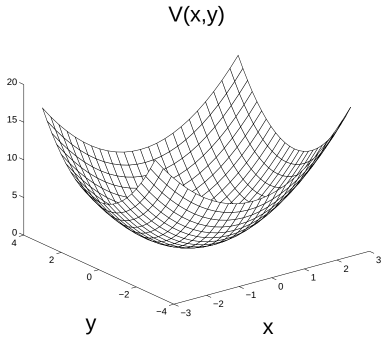
- <u>*Definizione*</u> Una funzione continua $V(\mathbf{x})$ è "definita positiva" (d.p.) *["semidefinita positiva" (s.d.p.)]* nell'interno del punto $\mathbf{x}_0$, se esiste un insieme aperto $W \subseteq \mathbf{R}^n$ di $\mathbf{x}_0$ tale per cui:

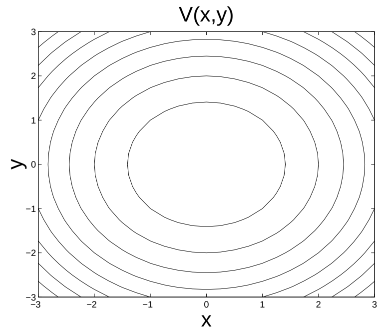
  1) $V(\mathbf{x}_0) = 0$;

  2) $V(\mathbf{x}) > 0$ *[*$V(\mathbf{x}) \geq 0$*]* per ogni $\mathbf{x} \in W - \mathbf{x}_0$.

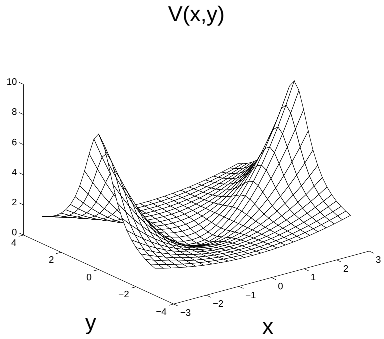
- Esempi di funzioni definite positive nell'intorno di $\mathbf{x}_0 = (0,\ 0)$:

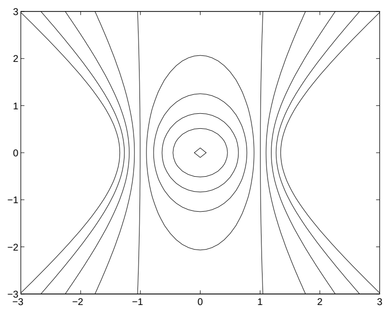
1) $V(x, y) = x^2 + y^2$



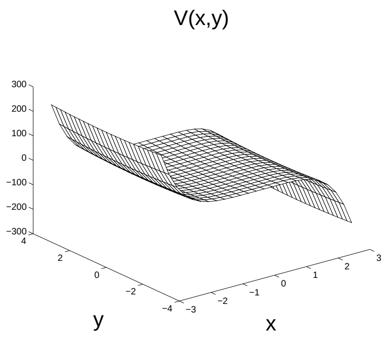


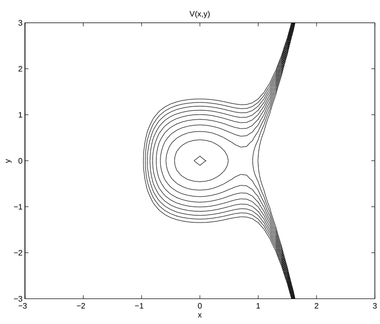
2) $V(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{(1 + y^2)}$





3) $V(x, y) = x^2 + y^2 - x^5$





Forme quadratiche.

- *Definizione*. La funzione continua $V(\mathbf{x})$ è una *forma quadratica* se può essere espressa nel modo seguente:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{x}$$

dove $\mathbf{P} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ è una matrice *simmetrica*.

- Se la matrice $\mathbf{P}$ è *[semi]*definita positiva, allora anche la corrispondente forma quadratica sarà *[semi]*definita positiva.

- Una matrice simmetrica $\mathbf{P}$ *è definita positiva se e solo se sono positivi tutti i minori principali*, cioè i determinanti delle seguenti sottomatrici:

$$p_{1,1} > 0, \quad \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix} > 0 \quad \cdots, \qquad \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix} > 0$$

- Quando si utilizzano forme quadratiche $V(\mathbf{x})$ si fa sempre riferimento solo a matrici simmetriche $\mathbf{P}$ per il motivo sotto indicato.

  1) Una qualunque matrice $\mathbf{P}$ può sempre essere espressa come somma di una matrice simmetrica $\mathbf{P}_s$ e di una matrice emisimmetrica $\mathbf{P}_w$:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{P}+\mathbf{P}^T}{2} + \frac{\mathbf{P}-\mathbf{P}^T}{2} = \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_w$$

  2) Solo la parte simmetrica $\mathbf{P}_s$ influenza la forma quadratica $V(\mathbf{x})$:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}_s\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{x}^T\mathbf{P}_w\mathbf{x}}_{0} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}_s\mathbf{x}$$

  Una proprietà delle matrici emisimmetriche $\mathbf{P}_w$ è infatti quella che il vettore $\mathbf{P}_w\mathbf{x}$ è sempre perpendicolare al vettore $\mathbf{x}$.

- Siano λ_i gli autovalori della matrice $\mathbf{P}_s$. *La forma quadratica*

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}_s\mathbf{x}$$

è definita positiva se e solo se *tutti gli autovalori λ_i sono positivi; è semi-definita positiva* se e solo se *tutti gli autovalori λ_i sono positivi o nulli.*

$$V(\mathbf{x}) > 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_i > 0 \qquad\qquad V(\mathbf{x}) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_i \geq 0$$

Calcolo della derivata della funzione $V(\mathbf{x})$

- Si consideri il sistema non lineare continuo ed autonomo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{u}_0) \qquad \rightarrow \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$$

e sia W un intorno aperto del punto di equilibrio $\mathbf{x}_0$ corrispondente all'ingresso costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$. Sia $V(\mathbf{x})$ una funzione scalare continua con derivate prime continue definita sull'intorno W:

$$V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$$

- Il gradiente della funzione $V(\mathbf{x})$ è un vettore così definito:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] = \text{grad } (V)$$

Tale vettore ha il significato geometrico di definire in $\mathbf{R}^n$ la direzione lungo la quale la funzione $V(\mathbf{x})$ aumenta con maggiore rapidità.

- Se $\mathbf{x}(t)$ è una soluzione del sistema non lineare $\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$, allora la derivata della funzione $V(\mathbf{x}(t))$può essere espressa nel seguente modo:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\bar{f}_1(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\bar{f}_n(\mathbf{x})$$

Tale prodotto può essere visto come il prodotto scalare tra i due vettori $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, e quindi può essere interpretato in modo geometrico:

$\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ $\qquad\qquad$ $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$

- ***Nota***: Il calcolo di $\dot{V}(\mathbf{x})$ non richiede la conoscenza della traiettoria $\mathbf{x}(t)$ e quindi non richiede la soluzione esplicita del sistema non lineare.

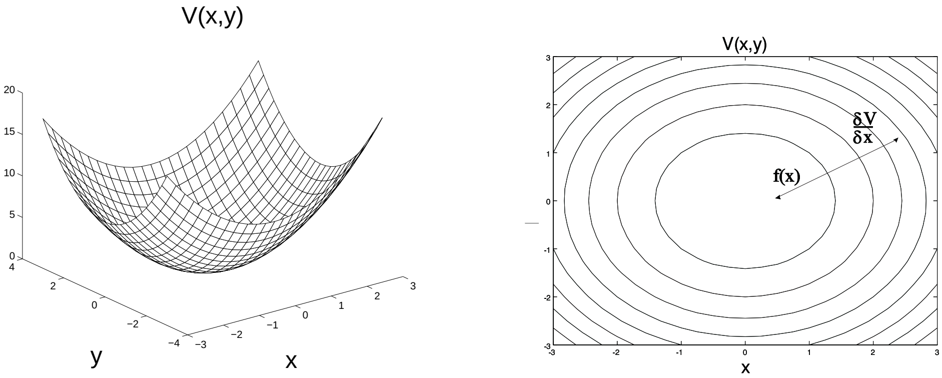
Secondo criterio di Lyapunov

- *Criterio "diretto" di Lyapunov*. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

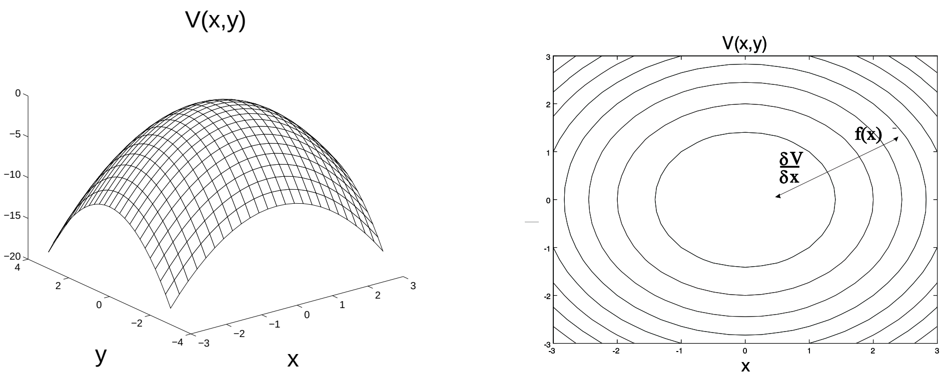
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{u}_0) \qquad \rightarrow \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$$

  e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\mathbf{u}_0$.
  1) Se in un intorno W di $\mathbf{x}_0$ esiste una funzione $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ *definita positiva* con derivate prime continue e se $\dot{V}(\mathbf{x})$ è *semidefinita negativa*, allora il punto $\mathbf{x}_0$ è *stabile* per il sistema non lineare.
  2) Se inoltre $\dot{V}(\mathbf{x})$ è *definita* negativa, allora il punto $\mathbf{x}_0$ è *asintoticamente* stabile.

- La condizione $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ da sola non garantisce la stabilità del punto $\mathbf{x}_0$, occorre anche che nell'intorno del punto $\mathbf{x}_0$ la funzione $V(\mathbf{x})$ sia definita positiva: $V(\mathbf{x}) > 0$.



1) $V(\mathbf{x}) > 0$ e $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \rightarrow$ sistema stabile



2) $V(\mathbf{x}) < 0$ e $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \rightarrow$ sistema instabile

- *Criterio di stabilità di La Salle-Krasowskii*. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{u}_0) \qquad \rightarrow \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$$

e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\mathbf{u}_0$. Se:

1) in un intorno W di $\mathbf{x}_0$ esiste una funzione $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ *definita positiva* con derivate prime continue;

2) $\dot{V}(\mathbf{x})$ è *semidefinita negativa*;

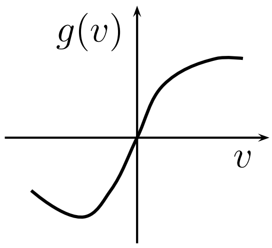
3) l'insieme $\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in W | \dot{V} = 0\}$ *non contiene traiettorie perturbate*;

allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di equilibrio *asintoticamente* stabile.

- Il criterio di stabilità di *La Salle* costituisce un "raffinamento" del criterio di Lyapunov in quanto consente di dimostrare la stabilità asintotica di un punto di equilibrio anche in molti casi in cui il criterio di Lyapunov può garantire soltanto la stabilità semplice.

Example. Consideriamo il circuito elettrico mostrato nella figura, in cui è presente un elemento non lineare N con una caratteristica corrente–tensione $I_N = g(v)$, in cui $g(v)$ è una funzione statica tale per cui $vg(v) > 0$. Consideriamo il vettore di stato: $\mathbf{x} = [I,\ v]^T$. La funzione di transizione dello stato è:

$$\begin{cases} \dot{I} = \dfrac{v}{L} \\[2ex] \dot{v} = -\dfrac{g(v)}{C} - \dfrac{I}{C} \end{cases}$$



L'origine è punto di equilibrio. Per studiarne la stabilità consideriamo la funzione definita positiva:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} C v^2$$

che rappresenta l'energia totale accumulata nel condensatore e nell'induttanza del circuito elettrico. Poichè la funzione

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = LI \underbrace{\frac{v}{L}}_{\dot{I}} + Cv \underbrace{\left(-\frac{g(v)}{C} - \frac{I}{C}\right)}_{\dot{v}} = -v\, g(v) \leq 0$$

è semidefinita negativa, l'equilibrio è sicuramente *almeno stabile*. Il luogo dei punti in cui si annulla la funzione $\dot{V}(\mathbf{x})$ è l'insieme:

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad\qquad I \in \mathcal{R}$$

Un movimento ha traiettoria totalmente contenuta in $\mathcal{N}$ se e solo se in ogni istante è $v(t) = 0$. Introducendo questa condizione nella seconda delle relazioni di stato, si ottiene:

$$0 = -\frac{I}{C} \qquad \rightarrow \qquad I = 0$$

Ma allora la traiettoria si riduce all'origine, e pertanto, non esistono in $\mathcal{N}$ traiettorie perturbate. Applicando il criterio di La Salle, si conclude che l'origine è asintoticamente stabile.

Nota: La chiave della stabilità del sistema risiede nel fatto che l'elemento non lineare ha una relazione tra tensione e corrente di tipo *dissipativo*, cioè tale elemento dissipa l'energia presente nel circuito.

Se esiste una traiettoria del sistema contenuta in $\mathcal{N}$, allora il sistema è semplicemente stabile.

- ***Criterio di instabilità di Lyapunov***. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\, \mathbf{u}_0) \qquad \rightarrow \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$$

e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\mathbf{u}_0$. Se:

1) in un intorno W di $\mathbf{x}_0$ esiste una funzione $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ continua con derivate prime continue e nulla in $\mathbf{x}_0$;
2) il punto $\mathbf{x}_0$ è punto di accumulazione per l'insieme dei punti $\mathbf{x} \in W$ in cui è $V(\mathbf{x}) > 0$;
3) $\dot{V}(\mathbf{x})$ è *definita positiva* in W;

allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di equilibrio *instabile*.

- *Nota*. Per poter utilizzare questo criterio la funzione $V(\mathbf{x})$ non deve necessariamente essere definita positiva in W.

Example. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &=& -x_2 + x_1 x_2 \end{cases}$$

ha $\mathbf{x} = 0$ come punto di equilibrio. Si consideri la seguente funzione

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

che assume valori positivi nel quarto di piano

$$W^+ = \{(x_1,\, x_2) \mid x_1 > x_2,\; x_1 > -x_2\}$$

L'origine è chiaramente un punto di accumulazione per l'insieme W^+. La funzione

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1^2(1 - x_2) + 2x_2^2(1 - x_1) > 0$$

è definita positiva in W^+. Ne segue che per il criterio di instabilità di Lyapunov, il punto di equilibrio $\mathbf{x} = 0$ è instabile.

Stabilità dei sistemi non lineari discreti

- Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k),\, \mathbf{u}_0) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k))$$

  e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\mathbf{u}_0$.

- Per poter applicare il criterio "diretto" di Lyapunov ad un sistema non lineare discreto occorre sempre fare riferimento ad una funzione <u>continua</u> $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ definita in un opportuno intorno W del punto $\mathbf{x}_0$, ma non è più possibile calcolare la funzione $\dot{V}(\mathbf{x})$ lungo le traiettorie del sistema perchè in questo caso le traiettorie $\mathbf{x}(k)$ sono discrete.

- In questo caso occorre fare riferimento alla seguente funzione discreta:

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) = V(\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k))) - V(\mathbf{x}(k))$$

  che rappresenta l'incremento ad un passo della funzione $V(\mathbf{x})$ calcolato lungo le traiettorie $\mathbf{x}(k)$ del sistema.

Example. Sia dato il seguente sistema non lineare discreto che ha $\mathbf{x}_0 = 0$ come punto di equilibrio e sia $V(x)$ una opportuna funzione definita positiva nell'intorno dell'origine:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \dfrac{x_2(k)}{1+x_2^2(k)} \\[2mm] x_2(k+1) = \dfrac{x_1(k)}{1+x_2^2(k)} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \\[2mm] \Delta V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \end{cases}$$

La funzione $\Delta V_{\mathbf{x}}$ si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}) &= \frac{x_2^2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{x_1^2}{(1+x_2^2)^2} - x_1^2 - x_2^2 \\ &= \frac{-(2+x_2^2)x_2^2}{(1+x_2^2)^2}(x_1^2 + x_2^2) \leq 0 \end{aligned}$$

La funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa, per cui il sistema è semplicemente stabile.

Criteri di [in]stabilità per i sistemi discreti

- Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k),\, \mathbf{u}_0) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}(k+1) = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k))$$

e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\mathbf{u}_0$. Per un sistema di questo tipo valgono i seguenti tre criteri.

- *Proprietà.* [Criterio "diretto" di Lyapunov] Se in un intorno W del punto $\mathbf{x}_0$ esiste una funzione continua $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ *definita positiva* e se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ *semidefinita negativa*, allora il punto $\mathbf{x}_0$ è *stabile*. Se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è *definita negativa*, allora il punto $\mathbf{x}_0$ è *asintoticamente stabile*.

- *Proprietà.* [Criterio di stabilità di La Salle] Se in un intorno W del punto $\mathbf{x}_0$ esiste una funzione continua $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ *definita positiva*, se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ *semidefinita negativa* e se l'insieme $\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in W | \Delta V(\mathbf{x}) = 0\}$ non contiene traiettorie perturbate del sistema dato, allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di equilibrio *asintoticamente stabile*.

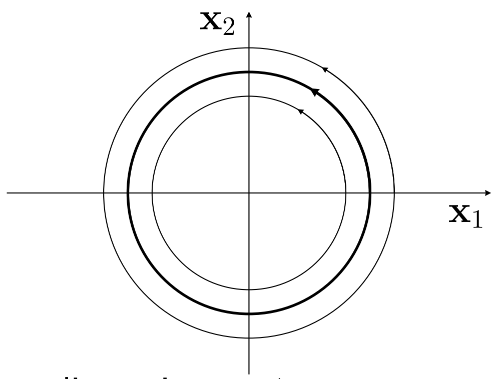
- *Proprietà.* [Criterio di instabilità di Lyapunov] Se in un intorno W del punto $\mathbf{x}_0$ esiste una funzione continua $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ nulla in $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0$ è un punto di accumulazione per l'insieme dei punti $\mathbf{x}$ in cui $V(\mathbf{x}) > 0$ e se $\Delta V(\mathbf{x})$ è definita positiva in W, allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di equilibrio *instabile*.

Example. Si consideri il seguente sistema autonomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'evoluzione libera a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ è la seguente

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$



La traiettoria nello spazio degli stati è una circonferenza di raggio $r = 1$.
Un sistema lineare può avere delle evoluzioni libere di tipo periodico. Tali traiettorie sono sempre semplicemente stabili. Nei sistemi lineari non può mai accadere di avere una traiettoria chiusa asintoticamente stabile. Una eventualità di questo tipo si può avere solamente nel caso di sistemi non lineari.

Si consideri per esempio il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(1 - r^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(1 - r^2) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Si può facilmente verificare per sostituzione che $r = 1$ è una soluzione periodica (ciclo limite) del sistema dato. Per verificare se $r = 1$ è un ciclo limite "stabile" o "instabile", si può procedere ad un cambiamento di coordinate. Passando per esempio a coordinate polari

$$\begin{cases} x_1 &= r\cos\theta \\ x_2 &= r\sin\theta \end{cases}$$

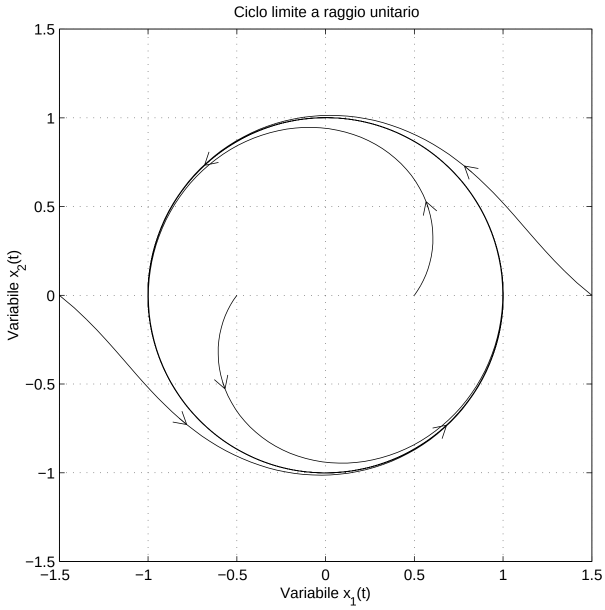
il sistema dato si trasforma come segue

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta &= -r\sin\theta + r\cos\theta(1 - r^2) \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta &= r\cos\theta + r\sin\theta(1 - r^2) \end{cases}$$

Combinando opportunamente le due equazioni si ottiene il seguente sistema equivalente a variabili separate:

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} r(t) &= \frac{e^t r_0}{\sqrt{1+(e^{2t}-1)r_0^2}} \\ \theta(t) &= t + \theta_0 \end{cases}$$

L'andamento qualitativo delle traiettorie nel piano $(x_1,\ x_2)$ è il seguente (vedi files: "ciclo_limite.m" e "ciclo_limite_ode.m"):



Il ciclo limite $r = 1$ è quindi globalmente stabile, cioè tutte le traiettorie del sistema (eccetto la traiettoria $r = 0$) tendono asintoticamente a questo ciclo limite, indipendentemente dalla condizione iniziale. Un modo alternativo per dimostrare che il ciclo limite è asintoticamente stabile è quello di considerare la seguente funzione $V(r)$ definita positiva in un intorno del punto $r = 1$:

$$V(r) = \frac{1}{2}(1-r)^2$$

La sua derivata è una funzione definita negativa nell'intorno del punto $r = 1$:

$$\dot{V}(r) = -(1-r)\dot{r} = -r(1-r)^2(1+r) < 0$$

Ne segue che il ciclo limite $r = 1$ è asintoticamente stabile.

Example. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \beta(2-x_1) + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^2 x_2 \end{cases}$$

1.a) Determinare, al variare del parametro reale $\beta > 0$, gli eventuali punti di equilibrio del sistema;

1.b) Studiare al variare di β la stabilità di tali punti.

<u>Soluzione</u>. 1.a) I punti di equilibrio si determinano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 &= \beta(2-x_1) + x_1^2 x_2 \\ 0 &= x_1 - x_1^2 x_2 = x_1(1 - x_1 x_2) \end{cases}$$

La seconda equazione è risolta per

$$x_1 = 0 \qquad \text{e per} \qquad x_1 x_2 = 1$$

La soluzione $x_1 = 0$ non soddisfa la prima equazione. Sostituendo $x_1 x_2 = 1$ nella prima equazione si ottiene:

$$2\beta - \beta x_1 + x_1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_1 = \frac{2\beta}{\beta - 1}$$

Per $\beta \neq 1$, l'unico punto di equilibrio del sistema è:

$$\bar{x}_1 = \frac{2\beta}{\beta - 1} \qquad \bar{x}_2 = \frac{\beta - 1}{2\beta}$$

1.b) Linearizzando nell'intorno di questo punto si ottiene:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\beta + 2x_1x_2 & x_1^2 \\ 1 - 2x_1x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 - \beta & \dfrac{4\beta^2}{(\beta-1)^2} \\ -1 & \dfrac{-4\beta^2}{(\beta-1)^2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

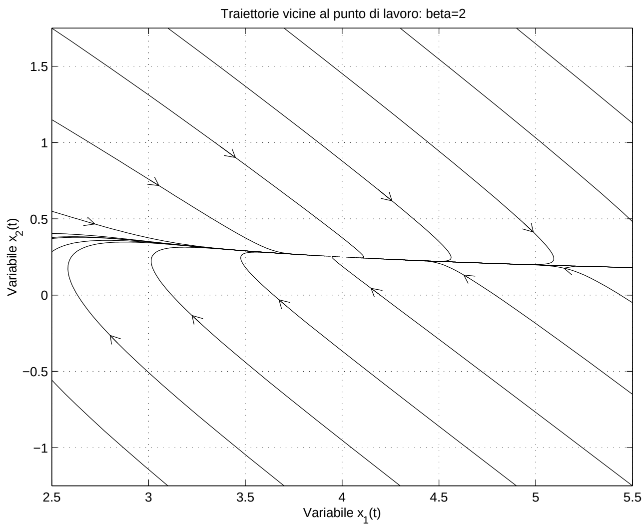
Il polinomio caratteristico del sistema è:

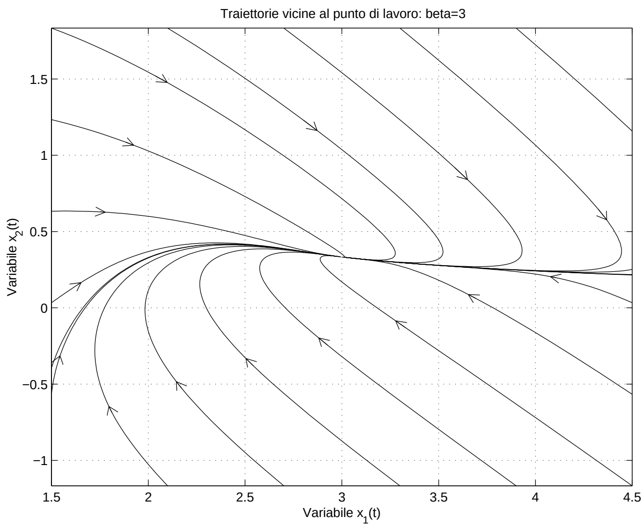
$$\Delta(s) = s^2 + \left[\beta - 2 + \frac{4\beta^2}{(\beta-1)^2}\right] s + \frac{4\beta^2}{(\beta - 1)} = 0$$

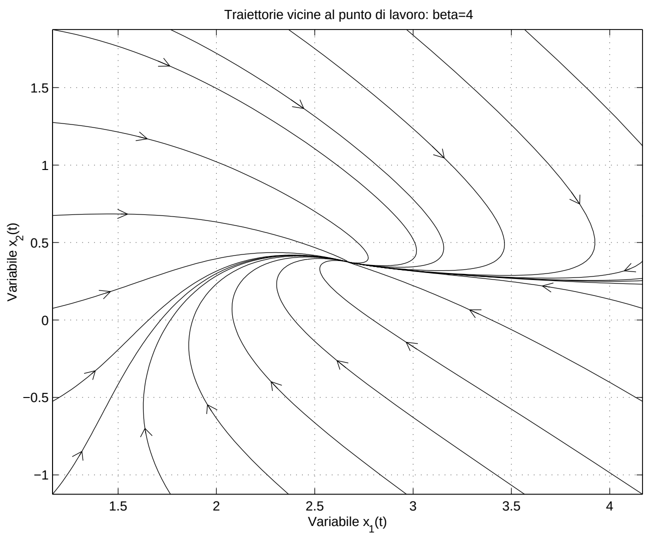
da cui si ricava

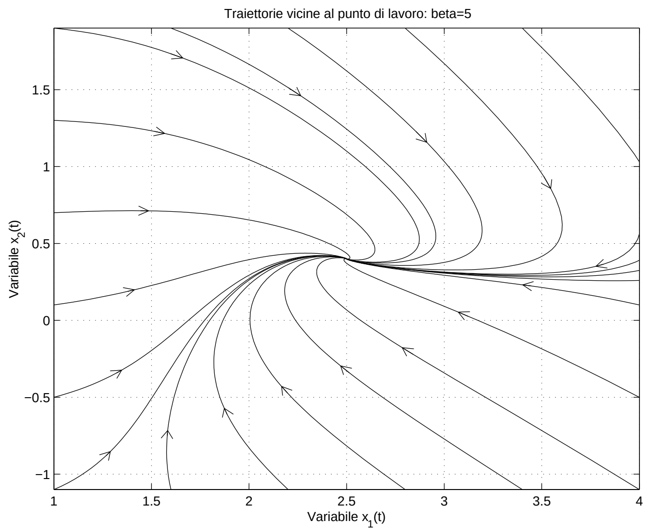
$$\Delta(s) = s^2 + \frac{\beta^3 + 5\beta - 2}{(\beta-1)^2} s + \frac{4\beta^2}{(\beta - 1)} = 0$$

Il punto di equilibrio è stabile se i coefficienti di tale polinomio sono entrambi positivi. Ciò accade per $\beta > 1$. Per $\beta < 1$, almeno un autovalore è instabile per cui anche il punto di equilibrio è instabile. Le traiettorie del sistema per $\beta = 2$, $\beta = 3$, $\beta = 4$ e $\beta = 5$ sono le seguenti:









Le precedenti simulazioni sono state ottenute in ambiente Matlab utilizzando il seguente file di comandi "ese_x1x2.m":

```
% Sistema non lineare:       x1d=beta*(2-x1)+x1^2*x2
%                            x2d=x1-x1^2*x2
global beta
for beta=[2:5];                        % Cambiando beta cambia il punto di lavoro
   x10=2*beta/(beta-1);                % Punto di equilibrio
   x20=(beta-1)/(2*beta);
   figure(1); clf
   V=[[-1.5 1.5]+x10 [-1.5 1.5]+x20];   % Finestra di graficazione
   In_Con=inicond(V,[5,5]);             % Definizione delle condizioni iniziali
   Tspan=[0:0.005:1]*2;                 % Intervallo di simulazione
   fr=10;  dx=0.06; dy=dx;              % Posizione e ampiezza delle frecce
   for jj=[1:size(In_Con,1)]
      [t,x]=ode23('ese_x1x2_ode',Tspan,In_Con(jj,:));    % Simulazione con ODE
      plot(x(:,1),x(:,2)); hold on                          % Graficazione
      freccia(x(fr,1),x(fr,2),x(fr+1,1),x(fr+1,2),dx,dy)    % Disegno delle frecce
   end
   grid on;  axis(V)                        % Griglia e definizione degli assi
   xlabel('Variabile x_1(t)')               % Label lungo l'asse x
   ylabel('Variabile x_2(t)')               % Label lungo l'asse y
   title(['Traiettorie vicine al punto di lavoro: beta=' num2str(beta)])
   pause                                    % Pausa. Premere un tasto per proseguire
end
```

il quale, a sua volta, fa riferimento al seguente file "ese_x1x2_ode.m":

```
% function dx=ese_x1x2_ode(t,x)
%
% ODE file relativo al sistema lineare:      x1d=beta*(2-x1)+x1^2*x2
%                                            x2d=x1-x1^2*x2
function dx=ese_x1x2_ode(t,x) global beta
dx(1,1)=beta*(2-x(1))+x(1)^2*x(2); dx(2,1)=x(1)-x(1)^2*x(2);
```

La funzione "In_Cond" definisce le condizioni iniziali da cui partire. La funzione "freccia" disegna una freccia nel punto e nella direzione desiderata.

Example. Si consideri il seguente sistema non-lineare continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - x_2 \end{cases}$$

1.a) Calcolare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilià utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov;

1.b) Se necessario, per concludere lo studio di stabilità del punto precedente, si utilizzi la seguente funzione: $V(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \ln x_1 - \ln x_2 - 2$.

Soluzione. 1.a) I punti di equilibrio si determinano imponendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$

$$\begin{cases} 0 &= x_1 - x_1 x_2 \\ 0 &= x_1 x_2 - x_2 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} x_1(1 - x_2) &= 0 \\ x_2(x_1 - 1) &= 0 \end{cases}$$

I due possibili punti di equilibrio sono

$$(x_1,\ x_2) = (0,\ 0), \qquad\qquad (x_1,\ x_2) = (1,\ 1)$$

Lo jacobiano del sistema nel punto $(0,\ 0)$ vale

$$J_0 = \left[\begin{array}{cc} 1 - x_2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{array}\right]_{(x_1,\, x_2)=(0,\, 0)} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right]$$

Lo jacobiano J_0 presenta un autovalore instabile $\lambda = 1$, per cui il punto di equilibrio $(x_1,\ x_2) = (0,\ 0)$ è sicuramente instabile. Nel punto $(1,\ 1)$, lo jacobiano del sistema vale

$$J_1 = \left[\begin{array}{cc} 1 - x_2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{array}\right]_{(x_1,\, x_2)=(1,\, 1)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$$

Lo jacobiano J_1 presenta due autovalori immaginari per cui utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov non è possibile concludere niente riguardo la stabilità del punto di equilibrio $(x_1,\ x_2) = (1,\ 1)$.

1.b) Per concludere lo studio di stabilità del punto di equilibrio $(1,\ 1)$ si utilizza la funzione data

$$V(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \ln x_1 - \ln x_2 - 2$$

Nell'intorno del punto $(1,\ 1)$, tale funzione è definita positiva. Infatti

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \ldots$$

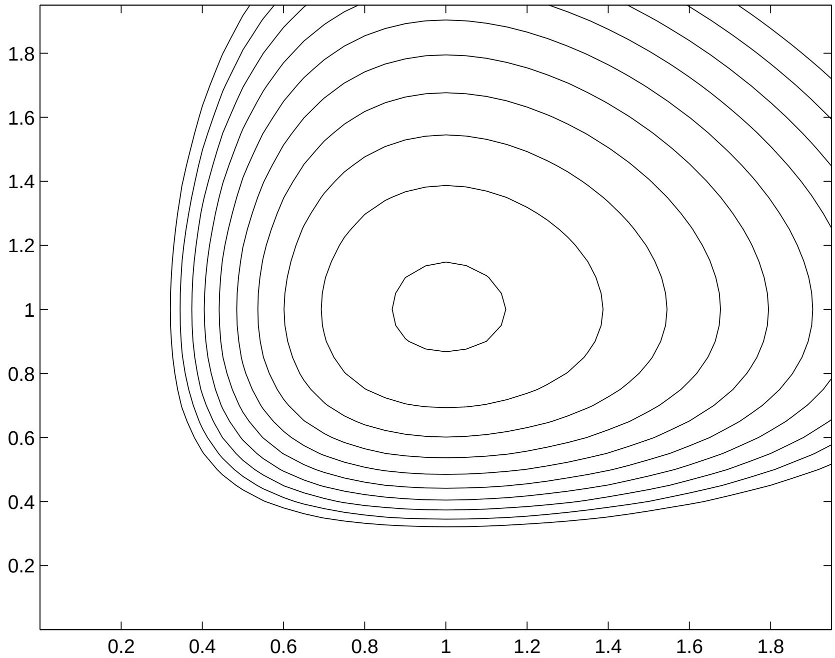
La sua derivata fatta rispetto al tempo vale

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \text{grad}V\ \dot{\mathbf{x}} = \left(1 - \frac{1}{x_1}\right)\dot{x}_1 + \left(1 - \frac{1}{x_2}\right)\dot{x}_2$$

da cui, per sostituzione, si ricava

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 - x_1x_2 + x_1x_2 - x_2 - (1 - x_2) - (x_1 - 1) = 0$$

Si è quindi ottenuto che $(1,\ 1)$ è un punto di equilibrio semplicemente stabile: le traiettorie si muovono lungo le curve di livello della funzione $V(x_1, x_2)$. Gli andamenti delle traiettorie nel piano $(x_1,\ x_2)$ sono i seguenti (vedi i files "ese_lnx.m" e "ese_lnx_ode.m"):



Example. Si consideri la seguente equazione differenziale non lineare:

$$\ddot{y}(t) = \cos y(t) - \frac{3}{2\pi}\, y(t) - \beta \dot{y}(t)$$

1.a) Si scrivano le equazioni di stato del corrispondente sistema dinamico e se ne determini il punto di equilibrio;

1.b) Determinare per quali valori del parametro β il sistema non lineare è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di equilibrio;

<u>Soluzione</u>. 1.a) Posto $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$, le equazioni di stato del sistema non lineare dato sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & \cos x_1 - \frac{3}{2\pi}\, x_1 - \beta x_2 \end{array} \right.$$

I punti di equilibrio si determinano imponendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$:

$$x_2 = 0, \qquad\qquad \cos x_1 = \frac{3}{2\pi}\, x_1$$

Da cui si ricava il seguente punto di equilibrio:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}, \qquad x_2 = 0$$

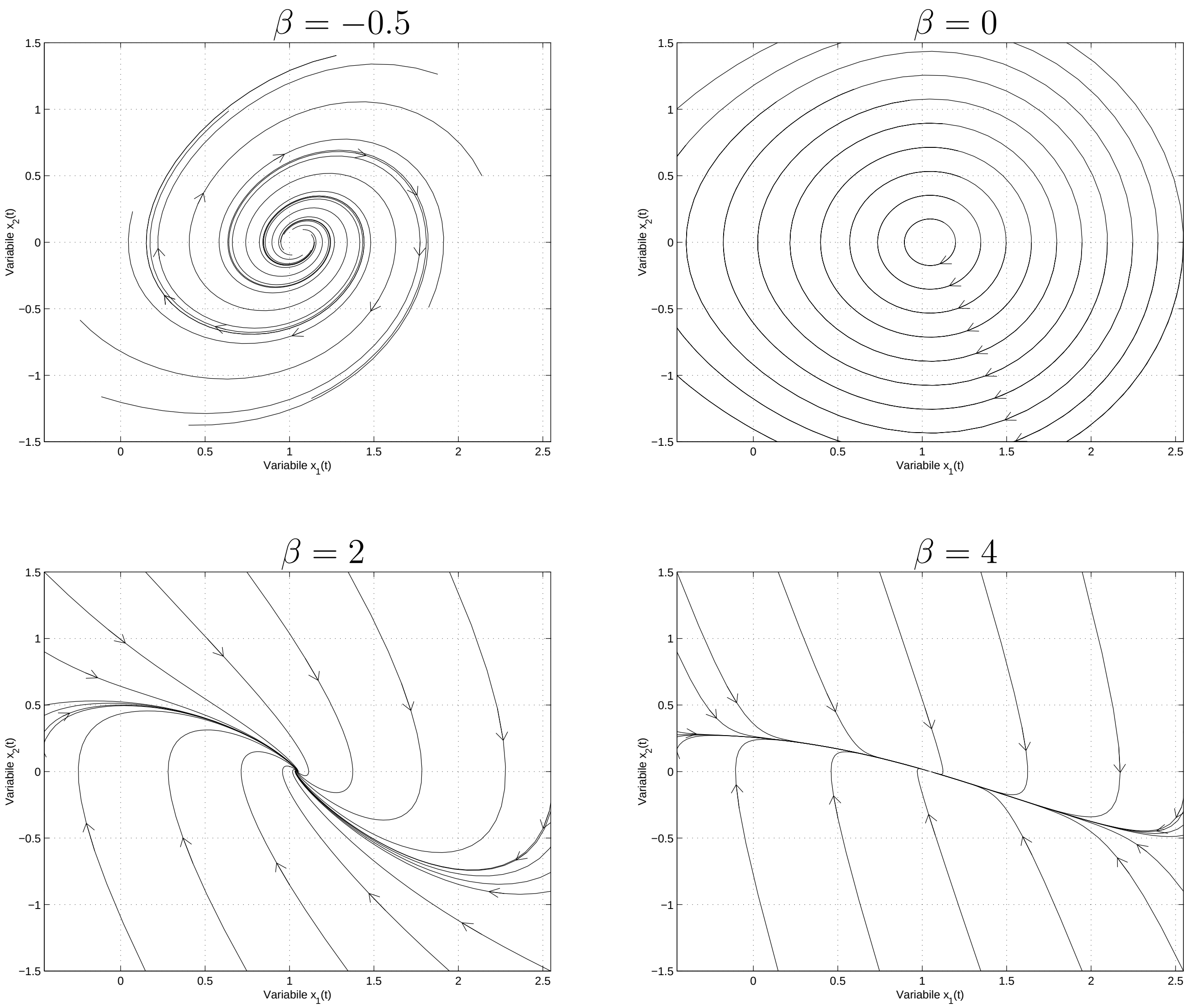
1.b) Linearizzando nell'intorno del punto di equilibrio si ottiene:

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\sin x_1 - \frac{3}{2\pi} & -\beta \end{array}\right]_{x_1=\frac{\pi}{3}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2\pi} & -\beta \end{array}\right]$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è

$$s^2 + \beta\, s + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2\pi} = 0$$

Chiaramente, il sistema è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di equilibrio se $\beta > 0$, mentre è instabile se $\beta < 0$. Per $\beta = 0$ il criterio ridotto di Lyapunov non si può utilizzare in quanto per tale valore di β la matrice $\mathbf{J}$ ha due autovalori complessi coniugati a parte reale nulla. Le traiettorie del sistema per $\beta = -0.5$, $\beta = 0$, $\beta = 2$ e $\beta = 4$ sono le seguenti (vedi i files "ese_cosx.m" e "ese_cosx_ode.m"):



Example. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= \alpha x_1(k) - x_1^3(k) \\ x_2(k+1) &= -x_2^3(k) - x_1^3(k) \end{cases}$$

1.a) Utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare del parametro α;

1.b) Si ripeta lo studio della stabilità nell'origine utilizzando la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Soluzione. 1.a) Linearizzando nell'intorno dell'origine si ottiene:

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cc} \alpha - 3x_1^2 & 0 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{array}\right]_{(0,0)} = \left[\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{J}$ è

$$z(z - \alpha) = 0 \qquad \rightarrow \qquad z_1 = 0, \;\; z_2 = \alpha$$

Chiaramente, il sistema dato è asintoticamente stabile nell'origine se $|\alpha| < 1$, mentre è instabile se $|\alpha| > 1$. Nel caso $|\alpha| = 1$ il criterio ridotto di Lyapunov non può essere utilizzato in quanto uno dei due autovalori si trova sul cerchio unitario.

1.b) La funzione

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

è definita positiva nell'intorno dell'origine per cui è una possibile funzione di Lyapunov. Il calcolo di $\Delta V(x_1, x_2)$ quando $\alpha = 1$ è il seguente:

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}) &= V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \\ &= x_1^2(1 - x_1^2)^2 + (-x_2^3 - x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1^4 + x_1^6 + x_2^6 + 2x_1^3x_2^3 + x_1^6 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= -x_1^4[2 - 2x_1^2] - x_2^2[1 - x_2^4 - 2x_2x_1^3] < 0 \end{aligned}$$

La funzione ottenuta è definita negativa in un opportuno intorno dell'origine per cui, nel caso $\alpha = 1$, il sistema non lineare dato è asintoticamente stabile nell'origine.
Nel caso $\alpha = -1$, anche la funzione data non permette di giungere ad un risultato conclusivo. Si noti che, in questo caso, la prima equazione del sistema diventa

$$x_1(k+1) = -x_1(k) - x_1^3(k)$$

ed è indipendente dalla variabile x_2. Si consideri ora la funzione $V(x_1) = x_1^2$ e si calcoli la $\Delta V(x_1)$:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1) &= (-x_1 - x_1^3)^2 - x_1^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1^4 + x_1^6 - x_1^2 = 2x_1^4 + x_1^6 > 0 \end{aligned}$$

La funzione $\Delta V(x_1)$ ottenuta è definita positiva per cui si può concludere che nel caso $\alpha = -1$, il sistema non lineare dato è instabile nell'origine.

Example. Dato il seguente sistema non–lineare discreto:

$$y(k+1) = -(r-2)y(k) - r\,y^2(k)$$

1.a) Calcolare, al variare del parametro $r > 0$, i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov.

1.b) Per $r = 3$, dimostrare che l'origine è un punto di lavoro asintoticamente stabile utilizzando la funzione di Lyapunov $V(y) = y^2 + \alpha y^3$ e scegliendo opportunamente il parametro α. Per $r = 1$, dimostrare che l'origine è un punto di lavoro instabile utilizzando la funzione $V(y) = -y$.

Soluzione. 1.a) I punti di equilibrio del sistema si ottengono imponendo $y(k+1) = y(k)$:

$$y(k) = -y(k)[r - 2 + r\,y(k)]$$

I punti di equilibrio del sistema sono:

$$y_1 = 0, \qquad\qquad y_2 = \frac{1-r}{r}$$

Il sistema linearizzato nell'intorno del punto $y_1 = 0$ è:

$$y(k+1) = -[r - 2 + 2ry(k)]_{(y=0)}\,y(k) = (2-r)y(k)$$

Il punto di equilibrio $y_1 = 0$ è stabile per $|2-r| < 1$, cioè per $1 < r < 3$, ed è instabile per $r > 3$ ed $r < 1$. Il sistema linearizzato nell'intorno del punto $y_2 = \frac{1-r}{r}$ è:

$$y(k+1) = -[r - 2 + 2ry(k)]_{\left(y=\frac{1-r}{r}\right)}\,y(k) = r\,y(k)$$

Il punto di equilibrio $y_1 = \frac{1-r}{r}$ è stabile per $0 < r < 1$, mentre è instabile per $r > 1$.

1.b) Posto $r = 3$ il sistema diventa

$$y(k+1) = -y(k) - 3\,y^2(k)$$

Per studiare la stabilità nell'origine si utilizza la funzione $V(y) = y^2 + \alpha y^3$. Tale funzione è definita positiva per qualunque valore di α. Il rapporto incrementale $\Delta V(y)$ è

$$\begin{aligned}
\Delta V(y) &= V(y(k+1)) - V(y(k)) \\
&= (-y - 3\,y^2)^2 + \alpha(-y - 3\,y^2)^3 - y^2 - \alpha y^3 \\
&= y^2 + 6y^3 + 9y^4 - \alpha(y^3 + 9y^4 + 27y^5 + 27y^6) - y^2 - \alpha y^3 \\
&= (6 - 2\alpha)y^3 + (9 - 9\alpha)y^4 - 27\alpha y^5 - 27\alpha y^6
\end{aligned}$$

La funzione $\Delta V(y)$ è definita negativa se si sceglie $\alpha = 3$:

$$\Delta V(y) = -18y^4 - 81y^5 - 81y^6$$

L'origine risulta quindi asintoticamente stabile per $r = 3$.

Per $r = 1$ i due punti di equilibrio coincidono: $y_1 = y_2 = 0$. L'equazione alle differenze del sistema diventa

$$y(k+1) = y(k) - y^2(k)$$

Per studiare la stabilità del punto $y = 0$ si utilizza la funzione

$$V(y) = -y \qquad \rightarrow \qquad \Delta V(y) = -(y - y^2) - (-y) = y^2 > 0$$

Siccome l'origine è punto di accumulazione per l'insieme dei punti in cui $V(y) > 0$, ed essendo $\Delta V(y)$ definita positiva, in base al criterio di instabilità di Lyapunov si può concludere che l'origine è un punto di equilibrio instabile.

Riassumendo, la stabilità dei due punti di equilibrio al variare di $r > 0$ è:

$$y_1 = 0 \;:\; \begin{cases} 1 < r \leq 3 & \text{as. stabile} \\ r \leq 1 \;\text{ e }\; r > 3 & \text{instabile} \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{1-r}{r} \;:\; \begin{cases} 1 < r & \text{as. stabile} \\ r \geq 1 & \text{instabile} \end{cases}$$