Analisi Modale

Si faccia riferimento al sistema tempo-discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$

e al sistema tempo-continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

Le evoluzioni libere dei due sistemi a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ sono

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$$

e

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

Le funzioni elementari del parametro k (del tempo t) che compaiono all'interno della matrice $\mathbf{A}^k$ (matrice $e^{\mathbf{A}t}$) possono essere facilmente evidenziate operando un cambiamento di base $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ nello spazio degli stati che trasformi la matrice $\mathbf{A}$ nella corrispondente forma canonica di Jordan $\overline{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T}\overline{\mathbf{A}}^k \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0$$

e

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}e^{\overline{\mathbf{A}}t}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0$$

Definizione. *Le funzioni discrete del tempo k che compaiono nella matrice $\overline{\mathbf{A}}^k$ e le funzioni continue del tempo t che compaiono nella matrice $e^{\overline{\mathbf{A}}t}$ prendono il nome di* modi del sistema.

Nota : Attraverso l'analisi dei modi del sistema è possibile caratterizzare la risposta libera del sistema a partire dai suoi autovalori.

I - Autovalori reali distinti

Nel caso in cui gli autovalori della matrice $\overline{\mathbf{A}}$ siano tutti distinti, necessariamente la matrice $\overline{\mathbf{A}}$ è in forma diagonale:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Le corrispondenti matrici di transizione $\overline{\mathbf{A}}^k$ e $e^{\overline{\mathbf{A}}t}$ assumono la forma:

$$\overline{\mathbf{A}}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \qquad e^{\overline{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

- I modi del sistema sono funzioni linearmente indipendenti in quanto gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono distinti.

$$\lambda_1^k,\ \lambda_2^k,\ \ldots,\ \lambda_n^k, \qquad\qquad e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ e^{\lambda_n t}$$

- Se lo stato iniziale $\overline{\mathbf{x}}_0$ appartiene all'autospazio relativo ad un particolare autovettore, allora l'evoluzione libera del sistema appartiene allo stesso autospazio.

- Ciascun modo reale può venire "eccitato' indipendentemente dagli altri modo. Ciascun modo complesso in generale viene eccitato assieme al suo coniugato.

- Una matrice è diagonalizzabile sse il polinomio minimo della matrice $\mathbf{A}$ ha tutte radici semplici;

- Una matrice è diagonalizzabile sse $\exists\ n$ autovettori linearmente indipendenti;

Autovalori complessi distinti.

Nel caso di autovalori complessi distinti le matrici di transizione hanno la seguente forma:

$$\tilde{\mathbf{A}}^k = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^k \begin{bmatrix} \cos k\theta_1 & \sin k\theta_1 \\ -\sin k\theta_1 & \cos k\theta_1 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & |\lambda_1|^k \begin{bmatrix} \cos k\theta_n & \sin k\theta_n \\ -\sin k\theta_n & \cos k\theta_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$e^{\tilde{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\sigma_1 t} \begin{bmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\sigma_n t} \begin{bmatrix} \cos \omega_n t & \sin \omega_n t \\ -\sin \omega_n t & \cos \omega_n t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

- I corrispondenti ***modi reali*** sono:

tempo discreto	tempo continuo
$\lvert\lambda_i\rvert^k \cos(k\theta_i), \quad \lvert\lambda_i\rvert^k \sin(k\theta_i),$	$e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t, \quad e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t$

- Ogni evoluzione libera ha componenti esprimibili come combinazioni lineari a coefficienti reali dei modi reali.

- I due modi corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi coniugati $|\lambda_i|^k \cos(k\theta_i), |\lambda_i|^k \sin(k\theta_i)$ (oppure $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t), e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)$) non possono essere "eccitati" in modo indipendente.
  Caso tempo discreto:

$$\begin{cases} x_{i,1}(k) = |\lambda_i|^k [\cos(k\theta_i) x_{i,1}(0) + \sin(k\theta_i) x_{i,2}(0)] \\ x_{i,2}(k) = |\lambda_i|^k [-\sin(k\theta_i) x_{i,1}(0) + \cos(k\theta_1) x_{i,2}(0)] \end{cases}$$

  Caso tempo continuo:

$$\begin{cases} x_{i,1}(t) = e^{\sigma_i t} [\cos(\omega_i t) x_{i,1}(0) + \sin(\omega_i t) x_{i,2}(0)] \\ x_{i,2}(t) = e^{\sigma_i t} [-\sin(\omega_i t) x_{i,1}(0) + \cos(\omega_i t) x_{i,2}(0)] \end{cases}$$

II - Autovalori reali multipli

Nel caso *tempo-discreto* la matrice di transizione vale:

$$\overline{\mathbf{A}}^k = diag(\mathbf{J}_1^k, \mathbf{J}_2^k, \ldots, \mathbf{J}_r^k)$$

dove ciascuno dei miniblocchi di Jordan produce un miniblocco del tipo:

$$\mathbf{J}_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \left(\frac{k(k-1)}{2!}\right)\lambda_i^{k-2} & \cdots & \left(\frac{k(k-1)\ldots(k-\nu_i+2)}{(\nu_i-1)!}\right)\lambda_i^{k-\nu_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

In questo caso i *modi* del sistema sono:

$$\lambda_i^k, k\lambda_i^{k-1}, \left(\frac{k(k-1)}{2!}\right)\lambda_i^{k-2}, \ldots, \left(\frac{k(k-1)\ldots(k-\nu_i+2)}{(\nu_i-1)!}\right)\lambda_i^{k-\nu_i+1}$$

Nel caso *tempo-continuo*, la matrice di transizione vale:

$$e^{\overline{\mathbf{A}}t} = diag(e^{\mathbf{J}_1 t}, e^{\mathbf{J}_2 t}, \ldots, e^{\mathbf{J}_r t})$$

dove ciascuno dei miniblocchi di Jordan produce un miniblocco del tipo:

$$e^{\mathbf{J}_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

In questo caso i *modi* del sistema sono:

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_i t},\ \cdots,\ \frac{t^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!}e^{\lambda_i t}$$

Autovalori complessi coniugati multipli

- Sulla base della forma reale di Jordan, è possibile considerare i modi reali corrispondenti a coppie di autovalori complessi coniugati con grado dimolteplicità maggiore di uno.

  Caso *tempo-discreto*:

$$\begin{cases} |\lambda|^k \cos(k\theta) \\ |\lambda|^k \sin(k\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k|\lambda|^{k-1} \cos((k-1)\theta) \\ k|\lambda|^{k-1} \sin((k-1)\theta) \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} \frac{k(k-1)\ldots(k-\nu+2)}{(\nu-1)!}|\lambda|^{k-\nu+1} \cos((k-\nu+1)\theta) \\ \frac{k(k-1)\ldots(k-\nu+2)}{(\nu-1)!}|\lambda|^{k-\nu+1} \sin((k-\nu+1)\theta) \end{cases}$$

  Caso *tempo-continuo*:

$$\begin{array}{ll} e^{\sigma t}\cos(\omega t), & e^{\sigma t}\sin(\omega t), \\ & \\ te^{\sigma t}\cos(\omega t), & te^{\sigma t}\sin(\omega t), \\ & \\ \vdots & \vdots \\ \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{\sigma t}\cos(\omega t), & \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{\sigma t}\sin(\omega t). \end{array}$$

Carattere di convergenza dei modi.

Consideriamo un sistema lineare tempo-invariante (a tempo continuo o discreto). Diremo che un modo $m(t)$ (reale o complesso), definito per $t \geq 0$ è:

- *convergente* se:
$$\lim_{t \to \infty} |m(t)| = 0$$
- *limitato, ma non convergente*, se esiste un numero reale $+\infty > M > 0$ tale che, $\forall t \geq 0$, si abbia:
$$0 < |m(t)| < M$$
- *non limitato*, se per ogni numero reale prefissato $M > 0$, esiste un instante di tempo t per cui:
$$|m(t)| > M$$

  Proposizione 1) : I modi del sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ sono:

  – *Convergenti* se e solo se tutti gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno parte reale strettamente negativa.

  – *Limitati* se e solo se gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno parte reale negativa o nulla e quelli a parte reale nulla sono associati a miniblocchi di Jordan di dimensione unitaria (cioè sono radici semplici del polinomio minimo).

  Proposizione 2) : I modi del sistema $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$ sono:

  – *Convergenti* se e solo se tutti gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno modulo strettamente minore di uno.

  – *Limitati* se e solo se gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno modulo minore od uguale ad uno e quelli con modulo unitario sono associati a miniblocchi di Jordan di dimensione unitaria (cioè sono radici semplici del polinomio minimo).