Allocazione degli autovalori ($m = 1$)

- Proprietà. *Sia $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C}, \mathbf{d})$ un sistema lineare di dimensione n, invariante, completamente raggiungibile e con un solo ingresso. Per ogni polinomio $p(\lambda)$ monico di grado n, esiste una matrice $\mathbf{k}^T \in \mathcal{R}^{1\times n}$ tale che il polinomio caratteristico dalla matrice di stato $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ che caratterizza il sistema retroazionato $\mathcal{S}_\mathbf{k}$ coincide proprio con $p(\lambda)$.*

- Prova. Siano α_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ i coefficienti del polinomio caratteristico $\Delta_\mathbf{A}(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$:

$$\Delta_\mathbf{A}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

e siano d_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ i coefficienti del polinomio arbitrario $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$$

La coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ è raggiungibile, per cui esiste un cambiamento di base che porta il sistema $\mathcal{S}$ in una forma canonica di controllo:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A}_c = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \mathbf{b}_c = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}$$

Adottando una legge di controllo del tipo:

$$u(t) = \mathbf{k}_c^T\mathbf{x}_c(t) + v(t)$$

dove con $\mathbf{k}_c^T$ si è indicato il vettore:

$$\mathbf{k}_c^T = [k_0,\ k_1,\ \ldots,\ k_{n-1}]$$

si ottiene la seguente equazione di stato:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = (\mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T)\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{b}_c\, v(t)$$

dove

$$\mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_0 - \alpha_0 & k_1 - \alpha_1 & \ldots & k_{n-1} - \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

- Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T$ è:

$$\Delta_{\mathbf{A}_c+\mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T}(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}(\alpha_{n-1} - k_{n-1}) + \ldots + (\alpha_0 - k_0)$$

Imponendo che $\Delta_{\mathbf{A}_c+\mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T}(\lambda)$ coincida con il polinomio $p(\lambda)$ si ottiene:

$$d_i = \alpha_i - k_i, \qquad\qquad i = 0, \ldots, n-1$$

da cui si ricava:

$$\mathbf{k}_c^T = \left[\ \alpha_0 - d_0,\ \ \alpha_1 - d_1,\ \ \ldots,\ \ \alpha_{n-1} - d_{n-1}\ \right]$$

- Il vettore $\mathbf{k}_c^T$ è quello che, nella forma canonica di controllo, impone al sistema retroazionato di avere autovalori coincidenti con gli zeri del polinomio $p(\lambda)$.

- Essendo:

$$u(t) = \mathbf{k}_c^T\mathbf{x}_c(t) + v(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{x}(t) + v(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{T}\mathbf{x}_c(t) + v(t)$$

si ricava che:

$$\mathbf{k}_c^T = \mathbf{k}^T\,\mathbf{T} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{k}_c^T[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}}$$

cioè il vettore dei guadagni $\mathbf{k}^T$ si calcola utilizzando la seguente formula:

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T \left\{ \left[\ \mathbf{b},\ \ \mathbf{A}\mathbf{b},\ \ \ldots,\ \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\ \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

dove $\mathbf{k}_c^T$ è il vettore precedentemente definito.

- Si noti che per calcolare il vettore $\mathbf{k}^T$ occorre conoscere solamente le matrice $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ e i polinomi $p(\lambda)$ e $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Determinare, se possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(k) = \mathbf{k}^T\mathbf{x}(k)$ in modo che il sistema retroazionato $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ sia di tipo "dead-beat".

Soluzione. La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{det}\mathcal{R}^+ = -1$$

Il sistema è completamente raggiungibile, per cui esiste una retroazione statica dello stato $u(k) = \mathbf{k}^T\mathbf{x}(k)$ tale da posizionare a piacere i poli del sistema retroazionato. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^3 = \lambda^3 \underbrace{-3}_{\alpha_2} \lambda^2 \underbrace{+3}_{\alpha_1} \lambda \underbrace{-1}_{\alpha_0}$$

Il polinomio caratteristico desiderato è è

$$p(\lambda) = \lambda^3 = \lambda^3 + \underbrace{0}_{d_2} \lambda^2 + \underbrace{0}_{d_1} \lambda + \underbrace{0}_{d_0}$$

Il vettore $\mathbf{k}^T$ si determina nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^T &= \mathbf{k}_c^T[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1} = \mathbf{k}_c^T \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \mathbf{k}_c^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underbrace{-1}_{\alpha_0 - d_0} & \underbrace{3}_{\alpha_1 - d_1} & \underbrace{-3}_{\alpha_2 - d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Formula di Ackerman

- *Sia dato un sistema lineare, invariante ad un solo ingresso ($m = 1$):*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u$$

e sia $p(\lambda)$ un polinomio monico scelto a piacere:

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$$

Se la coppia $(\mathbf{A},\, \mathbf{b})$ è raggiungibile, allora la matrice dei guadagni $\mathbf{k}^T$ tale per cui $\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{k}^T}(\lambda) = p(\lambda)$ si calcola anche utilizzando la seguente formula di Ackerman

$$\boxed{\mathbf{k}^T = -\mathbf{q}^T p(\mathbf{A})}$$

dove $\mathbf{q}^T$ è l'ultima riga dell'inversa della matrice di raggiungibilità:

$$\mathbf{q}^T = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right] (\mathcal{R}^+)^{-1}$$

Con $p(\mathbf{A})$ si indica la matrice che si ottiene dal polinomio $p(\lambda)$ sostituendo la matrice $\mathbf{A}$ al posto del parametro λ.

- Il vantaggio della formula di Ackerman è quello di non richiedere la conoscenza del polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

Esempio. Facendo riferimento al precedente esempio in cui era $p(\lambda) = \lambda^3$, la matrice $\mathbf{k}^T$ si calcola nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^T &= -\mathbf{q}^T p(\mathbf{A}) = -\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (\mathcal{R}^+)^{-1}\mathbf{A}^3 \\
&= -\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 \\
&= -\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Esempio. Dato il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\, u(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

calcolare la matrice dei guadagni della retroazione statica dello stato $u(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{x}$ che posizioni in -1, -2 e -2 gli autovalori del sistema retroazionato.

Il sistema è completamente raggiungibile:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}^T = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio desiderato è il seguente:

$$p(s) = (s+2)^2(s+1) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$

Essendo:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha che:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= (\mathbf{A}+2\mathbf{I})^2(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = \mathbf{A}^3 + 5\mathbf{A}^2 + 8\mathbf{A} + 4\mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 30 & 12 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la seguente matrice dei guadagni:

$$\mathbf{k}^T = -\mathbf{q}^T p(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 & 30 & 12 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Allo stesso risultato si sarebbe potuto giungere anche utilizzando la formula

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1}$$

In questo caso occorre calcolare il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ del sistema di partenza:

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s-1 & -2 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & -1 & s \end{vmatrix} = (s+1)(s-1)^2 = s^3 - s^2 - s + 1$$

Il polinomio desiderato è

$$p(s) = (s+2)^2(s+1) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$$

Il vettore $\mathbf{k}^T$ si ottiene nel modo seguente

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^T &= \mathbf{k}_c^T\{\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -9 & -6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \\
&= \begin{bmatrix} -9 & -6 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare stazionario continuo $[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t),\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)]$

$$\begin{cases}
\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
\end{cases}$$

Determinare, se è possibile, una retroazione algebrica dello stato $u(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{x}(t)$ che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori del sistema retroazionato

La matrice di raggiungibilià del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{R}^+$ è singolare per cui il sistema dato non è completamente raggiungibile. Il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$ è il seguente

$$\mathcal{X}^+ = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Una matrice di trasformazione per portare il sistema nella forma standard di raggiungibilità è la seguente

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sia $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$. Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Gli autovalori che caratterizzano il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ sono gli autovalori della sottomatrice $\mathbf{A}_{11}$, cioè $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$. L'autovalore che caratterizza la parte non raggiungibile del sistema è dato dalla sottomatrice $\mathbf{A}_{22}$, cioè $\lambda = -1$.
Siccome la parte non raggiungibile è stabile, esiste una retroazione dello stato $\mathbf{k}^T = \left[\begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & k_3 \end{array}\right]$ che stabilizza il sistema complessivo e tale da posizionare in -1 gli autovalori della parte raggiungibile. Per calcolare il vettore $\mathbf{k}^T$ è bene partire calcolando la matrice $\tilde{\mathbf{k}}^T$ che, nella forma standard di raggiungibilità, impone gli autovalori desiderati alla parte raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11}$ e quello della matrice $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{b}_1\tilde{\mathbf{k}}^T$ sono

$$\Delta_{\mathbf{A}_{11}}(s) = s^2 - s \qquad\qquad \Delta_{\mathbf{A}_{11}+\mathbf{b}_1\tilde{\mathbf{k}}^T}(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

Il vettore $\tilde{\mathbf{k}}^T$ si calcola in base alla seguente formula

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{k}}^T &= \mathbf{k}_c^T \mathbf{T}_c^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -1 & -3 \end{array}\right] \left\{ \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \right\}^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{cc} -1 & -3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -1 & -3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1 & -2 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Il vettore di retroazione $\mathbf{k}^T$ relativo al sistema nella forma originaria si determina nel seguente modo

$$\mathbf{k}^T = \left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{k}}^T & \alpha \end{array}\right] \mathbf{T}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -2 & \alpha \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -2+\alpha & -1 & \alpha \end{array}\right]$$

dove α è un parametro arbitrario.

Funzione di trasferimento di un sistema retroazionato

- Dato un sistema in forma canonica di controllo:

$$\mathbf{A}_c = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{array}\right] \quad \mathbf{b}_c = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right] \quad \mathbf{C}_c = \left[\begin{array}{cccc} \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{n-1} \end{array}\right]$$

- La sua matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ è:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{b}_c = \mathbf{C}_c \frac{agg(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)}{det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)}\mathbf{b}_c$$

dove:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_0$$

$$agg(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = \left[\begin{array}{cccc} * & * & \ldots & 1 \\ * & * & \ldots & s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \ldots & s^{n-1} \end{array}\right]$$

e quindi:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_0}$$

- Considerando la retroazione $\mathbf{A}_c + \mathbf{b}_c\mathbf{k}_c^T$, la funzione di trasferimento $\mathbf{H}_K$ del sistema retroazionato diventa:

$$\mathbf{H}_K(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \beta_0}{s^n + (\alpha_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \ldots + (\alpha_0 - k_0)}$$

- Le funzioni $\mathbf{H}(s)$ e $\mathbf{H}_K(s)$ hanno lo stesso polinomio a numeratore in quanto *una retroazione algebrica dello stato non modifica gli zeri del sistema di partenza, ne modifica solamente i poli.*