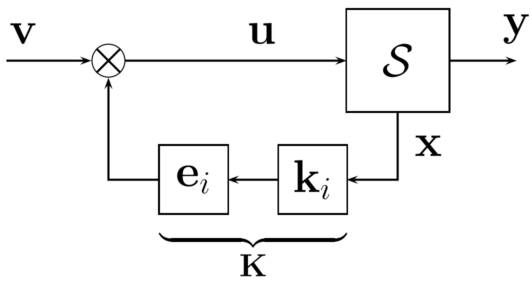
Allocazione degli autovalori

- *Proprietà. Sia dato un sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$ di dimensione n, con m ingressi e completamente raggiungibile.*

  Per ogni polinomio $p(\lambda)$ monico di grado n, esiste una matrice $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{m\times n}$ tale che il polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A+BK}}$ dalla matrice di stato $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ che descrive il sistema retroazionato $\mathcal{S}_{\mathbf{K}}$ coincide proprio con $p(\lambda)$.

- La dimostrazione è di tipo costruttivo. Si distinguono due casi:

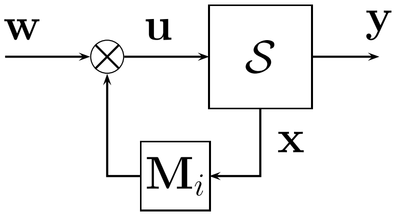
  1) *Il sistema è raggiungibile utilizzando solamente l'ingresso i-esimo.* In questo caso sarà possibile posizione a piacere gli autovalori del sistema retroazionato utilizzando solamente l'ingresso i-esimo:



$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_i\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mathbf{k}_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

  In questo caso la matrice di retroazione $\mathbf{K}$ ha solo la riga i-esima diversa da zero.

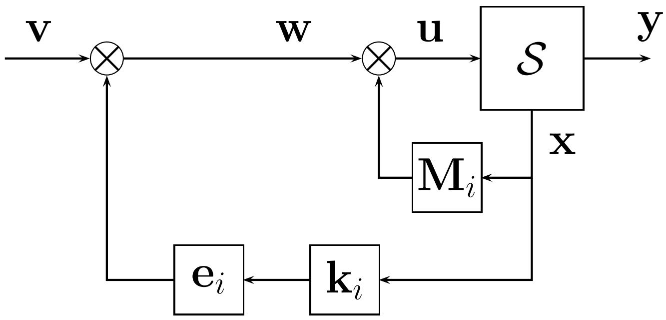
  2) *Il sistema è raggiungibile solamente utilizzando più ingressi.* In questo caso si procede ad attuare una prima retroazione dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{M}_i\mathbf{x} + \mathbf{w}$ che renda il sistema retroazionato raggiungibile utilizzando solamente l'ingresso i-esimo:

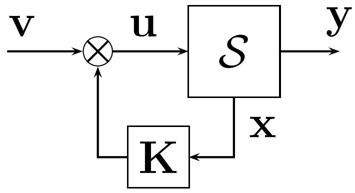


$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}+\mathbf{BM}_i)\mathbf{x} + \mathbf{Bw} \\ \mathbf{y} = (\mathbf{C}+\mathbf{DM}_i)\mathbf{x} + \mathbf{Dw} \end{cases}$$

  Il modo per calcolare la matrice $\mathbf{M}_i$ è fornito dal Lemma di Heyman.

Utilizzando poi una seconda retroazione statica dello stato $\mathbf{w} = \mathbf{e}_i\mathbf{k}_i\mathbf{x} + \mathbf{v}$ è possibile posizionare in modo arbitrario gli autovalori del sistema complessivo:





La matrice di retroazione complessiva $\mathbf{K}$ ha la seguente struttura:

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}_i + \mathbf{e}_i\mathbf{k}_i, \qquad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{M}_i + \mathbf{e}_i\mathbf{k}_i)]\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = [\mathbf{C} + \mathbf{D}(\mathbf{M}_i + \mathbf{e}_i\mathbf{k}_i)]\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v} \end{cases}$$

- Quindi, se la coppia $(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ è raggiungibile, il problema della stabilizzazione può essere risolto imponendo il margine di stabilità che si desidera, in quanto gli autovalori di $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ sono allocabili arbitrariamente.

- Se invece la coppia $(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ non è raggiungibile, è possibile posizionare a piacere solo gli autovalori della parte raggiungibile. Da un punto di vista pratico tale operazione "ha senso" solo nel caso in cui *il sottosistema non raggiungibile sia asintoticamente stabile*.

- *Lemma di Heymann. Se $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ è raggiungibile e se $\mathbf{b}_i$ è una colonna non nulla di $\mathbf{B}$, allora esiste una matrice $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m\times n}$, tale che $(\mathbf{A}+\mathbf{BM}_i\ ,\ \mathbf{b}_i)$ è raggiungibile.*

  La matrice $\mathbf{M}_i$ si calcola nel modo seguente (per $i = 1$). Si scelgono n colonne linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$, procedendo nel seguente modo:

  - Si considera la successione dei vettori $\mathbf{A}^i\mathbf{b}_1$, $i = 1, \ldots, \nu_1$, arrestandosi al primo intero ν_1 per cui $\mathbf{A}^{\nu_1}\mathbf{b}_1$ risulta linearmente dipendente dai precedenti:

$$\mathbf{A}^{\nu_1}\mathbf{b}_1 \quad \text{è comb. lin. di} \quad \{\mathbf{b}_1,\ \mathbf{A}\mathbf{b}_1,\ ,\ldots, \mathbf{A}^{\nu_1-1}\mathbf{b}_1\}$$

– Si considera poi la successione dei vettori $\mathbf{A}^i\mathbf{b}_2$, $i = 1, \ldots, \nu_2$, costruita in modo analogo.

$$\mathbf{A}^{\nu_2}\mathbf{b}_2 \quad \text{è comb. lin. di} \quad \{\mathbf{b}_1,\ ,\ldots, \mathbf{A}^{\nu_1-1}\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ ,\ldots, \mathbf{A}^{\nu_2-1}\mathbf{b}_2\}$$

– Quando $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = n$ il procedimento si arresta.

– Si costruiscono le matrici $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ ed $\mathbf{S} \in \mathcal{R}^{m\times n}$ nel seguente modo:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{b}_1 \ \ldots \ \mathbf{A}^{\nu_1-1}\mathbf{b}_1 \big| \ldots \big| \mathbf{b}_{k-1} \ \ldots \ \mathbf{A}^{\nu_{k-1}-1}\mathbf{b}_{k-1} \big| \mathbf{b}_k \ \ldots \ \mathbf{A}^{\nu_k-1}\mathbf{b}_k]$$

$$\mathbf{S} = [0 \ \ldots \ \mathbf{e}_2 \ \big| \ldots \big| \ 0 \ \ldots \ \mathbf{e}_k \ \big| \ 0 \ \ldots \ 0]$$

dove il vettore $\mathbf{e}_i$ rappresenta la i–esima colonna della matrice identità $\mathbf{I}_m$: il vettore $\mathbf{e}_2$ corrisponde alla ν_1–esima colonna di $\mathbf{S}$; $\mathbf{e}_3$ alla $(\nu_1 + \nu_2)$–esima colonna di $\mathbf{S}$, $\mathbf{e}_k$ è la $(\nu_1 + \ldots + \nu_{k-1})$–esima colonna di $\mathbf{S}$.

– La matrice

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1}$$

soddisfa il lemma di Heymann.

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$) a due ingressi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

Si calcoli, se è possibile, una retroazione $\mathbf{K}$ dello stato che posizioni tutti gli autovalori del sistema retroazionato in -1.

<u>Soluzione</u>. I sottospazi di raggiungibilià del sistema rispetto al primo e al secondo ingresso sono:

$$\mathcal{X}^+_{\mathbf{b1}} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{X}^+_{\mathbf{b2}} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è raggiungibile utilizzando un solo ingresso. Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono tutti instabili, $\lambda_{1,2,3} = 1$, per cui se si utilizza un solo ingresso, la parte non

raggiungibile è sicuramente instabile. Ne segue che il sistema non è stabilizzabile mediante una retroazione dello stato che utilizzi un solo ingresso. Utilizzando entrambi gli ingressi, il sistema è completamente raggiungibile per cui esiste sicuramente una matrice $\mathbf{K}$ tale da posizionare a piacere i poli del sistema retroazionato.
Applichiamo il lemma di Heymann per rendere il sistema raggiungibile mediante il primo ingresso. Le matrici $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{M}_1$ hanno la seguente struttura

$$\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \mathbf{e}_2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema che si ottiene retroazionando la matrice $\mathbf{M}_1$ è il seguente

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{M}_1}(s) = s^3 - 3s^2 + 2s = s(s-1)(s-2)$$

Il polinomio caratteristico desiderato è

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}}(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

La matrice di raggiungibilità del sistema $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_1,\ \mathbf{b}_1)$ è:

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{k}_1^T$ che impone al sistema retroazionato gli autovalori desiderati è la seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1^T &= \mathbf{k}_c^T[\mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1}]^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -6 & -14 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice di retroazione complessiva è quindi la seguente:

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -6 & -14 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tipicamente, nel caso a più ingressi, esistono infinite soluzioni al problema di posizionamento arbitrario dei poli.

Nel caso in esame, una soluzione alternativa che non utilizza il lemma di Heymann è la seguente. Si consideri una matrice $\mathbf{K}$ ad elementi tutti incogniti

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$$

e si calcoli l'espressione della matrice retroazionata

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_{11} & 1 + k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & 1 + k_{23} \end{bmatrix}$$

Posto $k_{21} = 0$, $k_{22} = 0$ e $k_{13} = 0$ si ottiene un sistema diagonale a blocchi

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ k_{11} & 1 + k_{12} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 + k_{23} \end{array}\right]$$

Tutti gli autovalori della matrice retroazionata sono in -1 se, per esempio, si sceglie $k_{23} = -2$ e se si impone

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{BK}}(s) = s^2 - (2 + k_{12})s + 1 + k_{12} - k_{11} = s^2 + 2s + 1$$

Da tale relazione si ricava

$$k_{12} = -4, \qquad\qquad k_{11} = -4$$

In definitiva la matrice di retroazione è la seguente:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$