Struttura duale dei sistemi dinamici lineari

È possibile dimostrare che le formule relative ai problemi di osservabilità e ricostruibilità possono essere ricavate per "dualità" dalle analoghe formule viste per i problemi di raggiungibilià e controllabilità.
Le sostituzioni che si debbono operare per passare da un sistema a quello duale sono le seguenti:

$\mathcal{S}$	$\leftrightarrow$	$\mathcal{S}_D$
$\mathbf{A}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{A}_D^T$
$\mathbf{B}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{C}_D^T$
$\mathbf{C}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{B}_D^T$
$\mathbf{D}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{D}_D^T$
$\mathbf{T}$	$\leftrightarrow$	$(\mathbf{P}^{-1})^T$

$\mathcal{S}$	$\leftrightarrow$	$\mathcal{S}_D$
$\mathcal{R}^+$	$\leftrightarrow$	$(\mathcal{O}_D^-)^T$
$\mathcal{O}^-$	$\leftrightarrow$	$(\mathcal{R}_D^+)^T$
$\mathcal{X}^+$	$\leftrightarrow$	$\mathcal{E}_D^-$
$\mathcal{E}^-$	$\leftrightarrow$	$\mathcal{X}_D^+$

Vediamo alcune delle corrispondenze più evidenti.

<table>
<tr>
<td>Matrice di raggiungibilità:
$$\mathcal{R}^+ = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{array}\right]$$</td>
<td>Matrice di osservabilità:
$$\mathcal{O}^- = \left[\begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{array}\right]$$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{X}^+$: è il più piccolo sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenente $\mathrm{Im}\mathbf{B}$.</td>
<td>Sottospazio di non osservabilità $\mathcal{E}^-$: è il più grande sottospazio invariante di $\mathbf{A}$ contenuto nel $\ker\mathbf{C}$.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Matrice $\mathbf{T}$ per trasformare, $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$, il sistema $\mathcal{S}$ completamente raggiungibile nel sistema $\overline{\mathcal{S}}$:
1) $\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\overline{\mathcal{R}}^+)^{-1}$
2) $\mathbf{T} = \mathcal{R}^+\overline{\mathcal{R}}^{+^T}(\overline{\mathcal{R}}^+\overline{\mathcal{R}}^{+^T})^{-1}$
dove $\mathcal{R}^+$ ed $\overline{\mathcal{R}}^+$ sono le matrici di raggiungibilità dei sistemi $\mathcal{S}$ ed $\overline{\mathcal{S}}$. La relazione (1) è valida per sistemi ad un solo ingresso; la relazione (2) è valida anche per sistemi a più ingressi.</td>
<td>Matrice $\mathbf{P}^{-1}$ per trasformare, $\mathbf{x} = \mathbf{P}\overline{\mathbf{x}}$, il sistema $\mathcal{S}$ completamente osservabile nel sistema $\overline{\mathcal{S}}$:
1) $\mathbf{P}^{-1} = (\overline{\mathcal{O}}^-)^{-1}\mathcal{O}^-$
2) $\mathbf{P}^{-1} = (\overline{\mathcal{O}}^{-^T}\overline{\mathcal{O}}^-)^{-1}\overline{\mathcal{O}}^{-^T}\mathcal{O}^-$
dove $\mathcal{O}^-$ e $\overline{\mathcal{O}}^-$ sono le matrici di osservabilità dei sistemi $\mathcal{S}$ e $\overline{\mathcal{S}}$. La relazione (1) è valida per sistemi ad una sola uscita; la relazione (2) è valida anche per sistemi a più uscite.</td>
</tr>
</table>

Forma standard di raggiungibilità:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & \overline{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{O} & \overline{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \overline{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix}$$

Forma standard di osservabilità:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \overline{\mathbf{A}}_{12} & \overline{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sottosistema raggiungibile:

$$\mathcal{S}_R = (\overline{\mathbf{A}}_{11},\ \overline{\mathbf{B}}_1,\ \overline{\mathbf{C}}_1)$$

Sottosistema osservabile:

$$\mathcal{S}_O = (\overline{\mathbf{A}}_{11},\ \overline{\mathbf{B}}_1,\ \overline{\mathbf{C}}_1)$$

Sottosistema non raggiungibile:

$$\mathcal{S}_{NR} = (\overline{\mathbf{A}}_{22},\ 0,\ \overline{\mathbf{C}}_2)$$

Sottosistema non osservabile:

$$\mathcal{S}_{NO} = (\overline{\mathbf{A}}_{22},\ \overline{\mathbf{B}}_2,\ 0)$$

Matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ per portare il sistema in forma standard di raggiungibilità:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}$$

dove

$$\mathrm{Im}\mathbf{T}_1 = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathcal{X}^+$$

e $\mathbf{T}_2$ rende non singolare la matrice $\mathbf{T}$.

Matrice di trasformazione $\mathbf{P}^{-1}$ per portare il sistema in forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\overline{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}$$

dove

$$\mathrm{Im}\mathbf{P}_1^T = \mathrm{Im}(\mathcal{O}^-)^T$$

e $\mathbf{P}_2$ rende non singolare la matrice $\mathbf{P}^{-1}$.

Matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$:

$$\mathbf{H}(s) = \overline{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\overline{\mathbf{B}}_1$$

è funzione della sola parte *raggiungibile* del sistema.

Matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$:

$$\mathbf{H}(s) = \overline{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \overline{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\overline{\mathbf{B}}_1$$

è funzione della sola parte *osservabile* del sistema.

Forma canonica di raggiungibilità (valida per sistemi raggiungibili ad un solo ingresso):

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\dots & 0 \\ 0 & 0 & 1\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

e dove i parametri $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$, sono i coefficienti del polinomio caratteristico *monico* della matrice $\mathbf{A}$: $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1} + \dots + \alpha_0$

Forma canonica di osservabilità (valida per sistemi osservabili ad una sola uscita):

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e dove i parametri $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$, sono i coefficienti del polinomio caratteristico *monico* della matrice $\mathbf{A}$: $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1} + \dots + \alpha_0$

Matrice di trasformazione $\mathbf{T}_c$ per portare il sistema $\mathcal{S}$ in forma canonica di raggiungibilità $\mathcal{S}_c$ ($\mathbf{x} = \mathbf{T}_c\mathbf{x}_c$):

$$\mathbf{T}_c = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di trasformazione $\mathbf{P}_c^{-1}$ per portare il sistema $\mathcal{S}$ in forma canonica di osservabilità $\mathcal{S}_c$ ($\mathbf{x} = \mathbf{P}_c \mathbf{x}_c$):

$$\mathbf{P}_c^{-1} = (\mathcal{O}_c^-)^{-1} \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Si noti che vale la relazione:

$$(\mathcal{R}_c^+)^{-1} = ((\mathcal{O}_c^-)^{-1})^T = (\mathcal{O}_c^-)^{-1}$$

Siano α_i i coefficienti del polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

e siano d_i i coefficienti di un polinomio monico arbitrario $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_1 \lambda + d_0$$

Se la coppia di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ è raggiungibile, il vettore dei guadagni $\mathbf{k}$ di una retroazione statica dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{k}\,\mathbf{x}$ che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{bk}$ è il seguente:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_c \mathbf{T}_c^{-1} = \mathbf{k}_c \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{b}, & \mathbf{Ab}, & \dots, & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

dove $\mathbf{k}_c = \begin{bmatrix} \alpha_0 - d_0, & \alpha_1 - d_1, & \dots, & \alpha_{n-1} - d_{n-1} \end{bmatrix}$.

Se la coppia di matrici $(\mathbf{A},\ \mathbf{c})$ è osservabile, il vettore dei guadagni $\mathbf{l}$ di un osservatore asintotico dello stato che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A}+\mathbf{lc}$ è il seguente:

$$\mathbf{l} = \mathbf{P}_c \mathbf{l}_c = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 - d_0 \\ \alpha_1 - d_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - d_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{l}_c}$$

Se la coppia di matrici $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ è raggiungibile, il vettore dei guadagni $\mathbf{k}$ di una retroazione statica dello stato $\mathbf{u} = \mathbf{k}\,\mathbf{x}$ che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A}+\mathbf{bk}$ si calcola utilizzando la seguente formula di Ackerman:

$$\mathbf{k} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1}}_{\mathbf{q}^T} p(\mathbf{A}) = -\mathbf{q}^T p(\mathbf{A})$$

dove $\mathbf{q}^T$ è l'ultima riga dell'inversa della matrice di raggiungibilità e dove $p(\mathbf{A})$ è la matrice che si ottiene dal polinomio arbitrario $p(\lambda)$ sostituendo in esso la matrice $\mathbf{A}$ al posto del parametro λ.

Se la coppia di matrici $(\mathbf{A},\ \mathbf{c})$ è osservabile, il vettore dei guadagni $\mathbf{l}$ di un osservatore asintotico dello stato che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A}+\mathbf{lc}$ si calcola utilizzando la seguente formula di Ackerman:

$$\mathbf{l} = -p(\mathbf{A})\, \underbrace{(\mathcal{O}^-)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = -p(\mathbf{A})\mathbf{q}$$

dove $\mathbf{q}$ è l'ultima colonna dell'inversa della matrice di osservabilità e dove $p(\mathbf{A})$ è la matrice che si ottiene dal polinomio arbitrario $p(\lambda)$ sostituendo in esso la matrice $\mathbf{A}$ al posto del parametro λ.

Scomposizione canonica di Kalman:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \overline{\mathbf{A}}_{13} & 0 \\ \overline{\mathbf{A}}_{21} & \overline{\mathbf{A}}_{22} & \overline{\mathbf{A}}_{23} & \overline{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \overline{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathbf{A}}_{43} & \overline{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & 0 & \overline{\mathbf{C}}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sottosistema raggiungibile:

$$\overline{\mathbf{A}}_R = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \overline{\mathbf{A}}_{21} & \overline{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}}_R = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}}_R = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sottosistema osservabile:

$$\overline{\mathbf{A}}_O = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & \overline{\mathbf{A}}_{13} \\ 0 & \overline{\mathbf{A}}_{33} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}}_O = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}}_O = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_1 & \overline{\mathbf{C}}_3 \end{bmatrix}$$

Sottosistema non raggiungibile:

$$\overline{\mathbf{A}}_{NR} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ \overline{\mathbf{A}}_{43} & \overline{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}}_{NR} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}}_{NR} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sottosistema non osservabile:

$$\overline{\mathbf{A}}_{NO} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{22} & \overline{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & \overline{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{B}}_{NO} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}}_{NO} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$