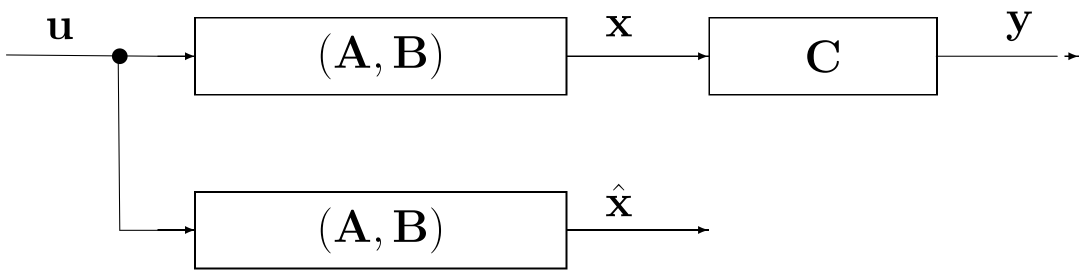
Stimatore dello stato in catena aperta

- La struttura dello stimatore in <u>*catena aperta*</u> non è altro che una "copia" delle equazioni dinamiche del sistema dato:



  – Le equazioni dello stimatore in catena aperta sono:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

  – Definendo come <u>*errore di stima*</u> la seguente variabile:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$$

  si ottiene che:

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] = \mathbf{A}\mathbf{e}(k)$$

  – Partendo da un errore di stima iniziale $\mathbf{e}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{x}(0)$, la dinamica dell'errore di stima è

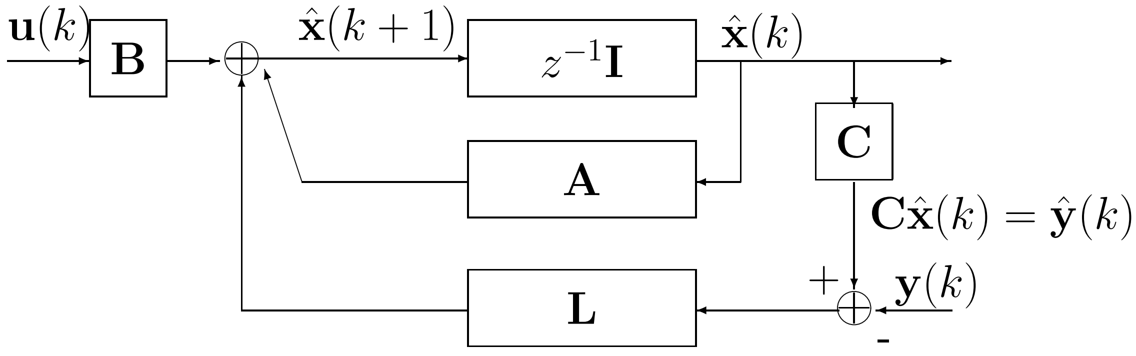
$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{e}(0)$$

  e quindi dipende dagli autovalori della matrice $\mathbf{A}$.

- Se il sistema è instabile, l'errore di stima *diverge*.
- Può essere utilizzato solo se il sistema è asintoticamente stabile.
- Non è possibile modificare la velocità di convergenza della stima $\hat{\mathbf{x}}(k)$ al valore vero $\mathbf{x}(k)$.

Stimatore dello stato in catena chiusa

- Lo stimatore in <u>*catena chiusa*</u>, utilizza una retroazione dell'uscita per stabilizzare gli autovalori (osservabili) dello stimatore di stato.



  - Le equazioni dello stimatore in catena chiusa valgono:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{Ly}(k) + \mathbf{B}u(k)$$

  - da cui l'errore:

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\mathbf{e}(k)$$

  - La dinamica dell'errore di stima è definita dagli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$.
  - Per la proprietà dei sistemi duali il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ può essere fissato ad arbitrio *se e solo se* la coppia $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ è raggiungibile o, equivalentemente, *se e solo se* la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ è osservabile.
  - Per calcolare la matrice $\mathbf{L}$ si considera la coppia $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ e si procede seguendo le tecniche viste per la allocazione degli autovalori a partire da una coppia raggiungibile, da cui si ottiene $\mathbf{L}^T$.
  - Se la coppia $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ è non osservabile , la dinamica dell'errore di stima caratterizzata da $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$ ha dei modi fissi, non influenzabili tramite la retroazione. *Solo se la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile è possibile ancora la sintesi dello stimatore asintotico.*

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare continuo [$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,u(t)$, $y(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)$]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è il vettore di stato, $y(t)$ il segnale di uscita e $u(t)$ il segnale d'ingresso. Determinare, se è possibile, la matrice $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni in -1 il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore. Nella sintesi dell'osservatore si utilizzi la formula di Ackerman.

<u>Soluzione.</u> Il sistema è completamente osservabile

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{O}^- = -2$$

per cui è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno. Utilizzando la formula di Ackerman si ha:

$$\mathbf{L} = -(\mathbf{A} + \mathbf{I})^3 (\mathcal{O}^-)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) & = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) \end{array}\right. \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{x}(k)$ è il vettore di stato, $y(k)$ il segnale di uscita e $u(k)$ il segnale d'ingresso.

1.a) Determinare il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ del sistema. Portare il sistema nella forma standard di osservabilità.

1.b) Determinare, se possibile, la matrice dei guadagni $\mathbf{L}$ di un osservatore asintotico dello stato di ordine pieno che posizioni nell'origine il maggior numero possibile di autovalori dell'osservatore.

<u>Soluzione.</u> 1.a) La matrice di osservabilità del sistema dato è la seguente:

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{O}^-$ ha determinante nullo, per cui il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$ si determina calcolando il kernel della matrice $\mathcal{O}^-$.

$$\mathcal{E}^- = \text{span}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare gli autovalori della parte non osservabile del sistema occorre portare il sistema stesso nella forma standard di osservabilità utilizzando, per esempio, la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema trasformato assume la seguente forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} \bar{\mathbf{x}}(k+1) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0.25 & 0.75 & 0 \end{array}\right]\mathbf{x}(k) + \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ \hline 1 \end{array}\right] u(k) \\ y(k) & = & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\mathbf{x}(k) \end{array}\right.$$

L'autovalore della parte non osservabile è stabile: $\lambda = 0$. È quindi possibile costruire un osservatore asintotico dello stato.

1.b) La sintesi della matrice $\mathbf{L}$ viene fatta facendo riferimento alla forma standard di osservabilità. In base alla partizione sopra riportata, la matrice $\bar{\mathbf{L}}$ deve essere scelta in modo che gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1$ siano entrambi nulli

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_{11} + \bar{\mathbf{L}}\mathbf{A}_{21}$ è

$$\Delta(z) = (z - l_1)z - (l_2 + 1) = z^2 - l_1 z - l_2 - 1$$

Imponendo $\Delta(z) = z^2$ si trova la soluzione cercata

$$\bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{L}$ da utilizzare sul sistema originario è

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -0.25 + \alpha \end{bmatrix}$$

Stimatore dello stato di ordine ridotto

- Gli stimatori asintotici dello stato di ordine intero forniscono una informazione ridondante, in quanto non tengono conto che alcune variabili di stato possono essere ottenute direttamente dalle uscite.

- Gli stimatori di ordine ridotto costituiscono uno schema modificato in cui solo le componenti del vettore di stato non immediatamente accessibili vengono stimate.

- *Procedimento di calcolo di per uno stimatore di ordine ridotto*

  – Sia $\mathbf{H}$ un insieme di p righe linearmente indipendenti estratte dalla matrice di uscita $\mathbf{C}$.

  – Si costruisca una matrice di trasformazione $\mathbf{P}^{-1}$ in cui le ultime p righe coincidano con $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$$

  dove $\mathbf{V}$ è una sottomatrice di ordine $(n-p) \times n$, costituita da un insieme di vettori che completano ad un insieme di vettori linearmente indipendenti gli elementi di $\mathbf{H}$.

  – Il cambiamento di base permette di far coincidere le p uscite con le ultime p componenti del nuovo vettore di stato $\overline{\mathbf{x}}$:

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}\mathbf{x} \\ \mathbf{H}\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

  – Rispetto alla nuova base le matrici che descrivono il sistema diventano:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \overline{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{C}\mathbf{P} = \overline{\mathbf{C}}$$

- Le nuove equazioni di stato del sistema sono:

$$\overline{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{1,1} & \overline{\mathbf{A}}_{1,2} \\ \overline{\mathbf{A}}_{2,1} & \overline{\mathbf{A}}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = [\ 0 \ \ \mathbf{I}_p\ ] \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

- Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) &= \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\mathbf{w}(k) + \overline{\mathbf{A}}_{1,2}\mathbf{y}(k) + \overline{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) &= \overline{\mathbf{A}}_{2,1}\mathbf{w}(k) + \overline{\mathbf{A}}_{2,2}\mathbf{y}(k) + \overline{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

- Premoltiplicando la seconda equazione per una matrice $\mathbf{L}$ di dimensioni $(n-p) \times p$ e sommandola alla precedente si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k+1) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k+1) \ &= (\overline{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1})\mathbf{w}(k) + \\ &+ (\overline{\mathbf{A}}_{1,2} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,2})\mathbf{y}(k) + (\overline{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\overline{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

- Sommando e sottraendo a secondo membro il termine $(\overline{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1})\mathbf{L}\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} &\overbrace{\mathbf{w}(k+1) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k+1)}^{\mathbf{v}(k+1)} = (\overline{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1})[\overbrace{\mathbf{w}(k) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k)}^{\mathbf{v}(k)}] + \\ &+ (\overline{\mathbf{A}}_{1,2} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,2} - \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + (\overline{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\overline{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

- Ponendo $\mathbf{v}(k) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k)$, l'ultima relazione diventa l'equazione di stato di un sistema con vettore di stato $\mathbf{v}(k)$ di dimensione $n-p$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k+1) \ &= \ (\overline{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1})\mathbf{v}(k) + \\ &+ (\overline{\mathbf{A}}_{1,2} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,2} - \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + \\ &+ (\overline{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\overline{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

- Per tale sistema si costruisce uno stimatore a catena aperta di ordine $n-p$. La dinamica dell'errore di stima $\mathbf{e}(k)$ per tale sistema è fissata dagli autovalori della matrice $(\overline{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1})$:

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{v}(k+1) - \hat{\mathbf{v}}(k+1) = (\overline{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1})\mathbf{e}(k)$$

- Lo stimatore asintotico di ordine ridotto ha quindi la seguente struttura:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

dove $\hat{\mathbf{v}}(k)$ si determina come uscita del seguente sistema dinamico:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(k+1) &= (\overline{\mathbf{A}}_{1,1} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1})\hat{\mathbf{v}}(k) + \\ &+ (\overline{\mathbf{A}}_{1,2} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,2} - \overline{\mathbf{A}}_{1,1}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{2,1}\mathbf{L})\mathbf{y}(k) + \\ &+ (\overline{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}\overline{\mathbf{B}}_2)\mathbf{u}(k) \end{aligned}$$

- Gli autovalori dello *stimatore di ordine ridotto* possono essere fissati ad arbitrio, con una scelta opportuna di $\mathbf{L}$ se la coppia $(\overline{\mathbf{A}}_{1,1}, \overline{\mathbf{A}}_{2,1})$ è osservabile.

- È possibile mostrare che:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \text{ osservabile } \Rightarrow (\overline{\mathbf{A}}_{1,1}, \overline{\mathbf{A}}_{2,1}) \text{ osservabile}$$

- La stima dello stato $\mathbf{x}(k)$ si ottiene da $\mathbf{v}(k)$:

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \Rightarrow \hat{\mathbf{w}}(k) = \hat{\mathbf{v}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

- Schema a blocchi di uno stimatore di ordine ridotto: