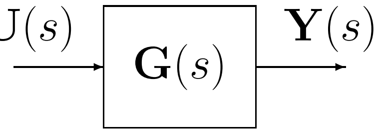
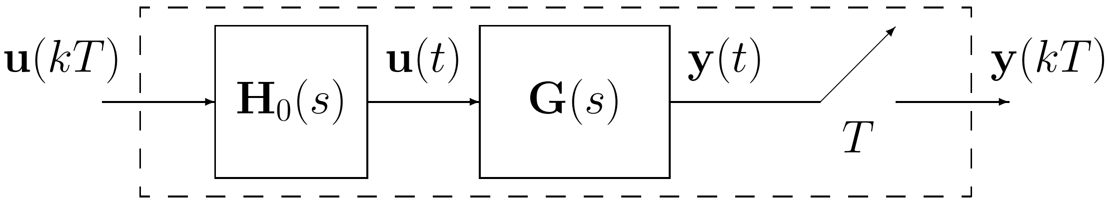
Sistemi a segnali campionati

Si consideri il seguente sistema lineare tempo continuo:

$$\mathbf{G}(s): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

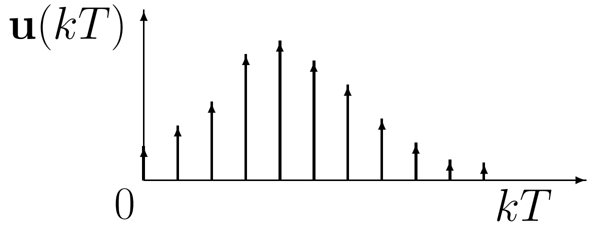


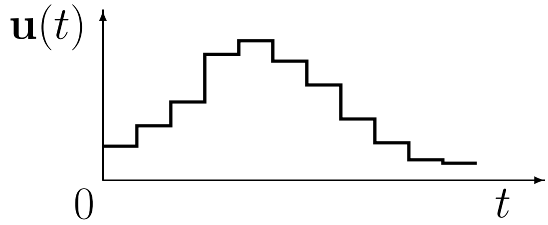
Se si inserisce un ricostruttore di ordine zero $\mathbf{H}_0(s)$ e un campionatore ideale di periodo T, rispettivamente a monte e a valle del sistema continuo $\mathbf{G}(s)$, si ottiene il seguente sistema tempo discreto:



Essendo all'uscita del ricostruttore $\mathbf{H}_0(s)$, il segnale $\mathbf{u}(t)$ è continuo a tratti:

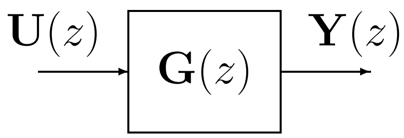
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) \qquad \text{per} \qquad kT \le t \le (k+1)T$$





Il segnale $\mathbf{y}(t)$ campionato con periodo T genera il segnale discreto $\mathbf{y}(kT)$. Il comportamento ingresso-uscita del sistema complessivo è quello di un sistema tempo discreto:

$$\mathbf{G}(z): \begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{F}\,\mathbf{x}(kT) + \mathbf{G}\,\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{H}\,\mathbf{x}(kT) \end{cases}$$



Esiste un preciso legame tra le matrici $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ e le matrici $(\mathbf{F},\ \mathbf{G},\ \mathbf{H})$. Tale legame si determina risolvendo la seguente equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$$

nell'intervallo di tempo $[kT,\ (k+1)T]$. Lo stato $\mathbf{x}(t)$ che si raggiunge a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(kT)$ all'istante $t = kT$ è:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-kT)}\,\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\gamma)}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(\gamma)\,d\gamma$$

Essendo l'ingresso costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT)$, lo stato $\mathbf{x}((k+1)T)$ che si raggiunge all'istante $t = (k+1)T$ è quindi il seguente:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}((k+1)T) &= \underbrace{e^{\mathbf{A}T}}_{\mathbf{F}}\,\mathbf{x}(kT) + \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\gamma)}\mathbf{B}\,d\gamma}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{u}(kT)\\ &= \mathbf{F}\,\mathbf{x}(kT) + \mathbf{G}\,\mathbf{u}(kT)\end{aligned}$$

Operando il seguente cambiamento di variabile:

$$\sigma = (k+1)T - \gamma \qquad \rightarrow \qquad d\sigma = -d\gamma$$

la matrice $\mathbf{G}$ può essere trasformata come segue:

$$\mathbf{G} = \int_{T}^{0} e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,(-d\sigma) = \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma$$

L'uscita $\mathbf{y}(kT)$ si ottiene da $\mathbf{y}(t)$ campionando all'istante $t = kT$:

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{y}(t)|_{t=kT} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)|_{t=kT} = \underbrace{\mathbf{C}}_{\mathbf{H}}\,\mathbf{x}(kT)$$

Il legame tra le matrici $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C})$ e le matrici $(\mathbf{F},\ \mathbf{G},\ \mathbf{H})$ è quindi il seguente:

$$\boxed{\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}\,T}, \qquad \mathbf{G} = \int_{0}^{T} e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}}$$

Il sistema $\mathbf{G}(z)$ che si ottiene da $\mathbf{G}(s)$ nel modo precedentemente descritto prende il nome di *sistema a segnali campionati*

Poichè le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ dipendono da T, è bene studiare come variano le proprietà strutturali di raggiungibilità e osservabilità del sistema a segnali campionati al variare del periodo di campionamento T.
Essendo $\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}$, il sistema a segnali campionati è stabile se e solo se il sistema tempo-continuo è stabile.
Essendo la matrice $\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}$ sempre invertibile, per un sistema a segnali campionati la controllabilità e la ricostruibilità sono sempre equivalenti, rispettivamente, alla raggiungibilità e all'osservabilità.
Per sistemi ad un solo ingresso vale la seguente proprietà.

Teorema. *Sia dato un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{b})$ raggiungibile e sia T il periodo di campionamento. Il corrispondente sistema a segnali campionati è raggiungibile se e solo se, per ogni coppia λ_i, λ_j di autovalori distinti di $\mathbf{A}$ aventi la stessa parte reale si ha:*

$$\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} = k\,\omega_s \qquad\qquad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \dots$$

Per sistemi ad una sola uscita vale la seguente proprietà.

Teorema. *Sia dato un sistema $(\mathbf{A},\ \mathbf{c})$ osservabile e sia T il periodo di campionamento. Il corrispondente sistema a segnali campionati è osservabile se e solo se, per ogni coppia λ_i, λ_j di autovalori distinti di $\mathbf{A}$ aventi la stessa parte reale si ha:*

$$\mathrm{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} = k\,\omega_s \qquad\qquad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \dots$$

Nota. In base ai precedenti teoremi si può affermare che se la matrice $\mathbf{A}$ ha tutti gli autovalori reali, il sistema a segnali campionati conserva sempre, per ogni $T > 0$, le stesse caratteristiche strutturali del sistema di partenza $(\mathbf{A},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$.

Esempio. Dato il seguente sistema tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

si calcoli il corrispondente sistema a segnali campionati. Sia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\,\sigma = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\, d\,\sigma\right)\mathbf{B} \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} \cos\sigma & \sin\sigma \\ -\sin\sigma & \cos\sigma \end{bmatrix} d\,\sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\sigma & -\cos\sigma \\ \cos\sigma & \sin\sigma \end{bmatrix}_0^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin T & 1-\cos T \\ \cos T - 1 & \sin T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\cos T \\ \sin T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{H}$ coincide con la matrice $\mathbf{C}$.

Il corrispondente sistema a segnali campionati è quindi il seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1-\cos T \\ \sin T \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

dove per brevità si è posto

$$\mathbf{x}(k) \equiv \mathbf{x}(kT), \qquad y(k) \equiv y(kT), \qquad u(k) \equiv u(kT)$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono $\lambda_1 = j$, $\lambda_2 = -j$.
La matrice di raggungibilità del sistema a segnali campionati è

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^+ = [\mathbf{G}\;\; \mathbf{FG}] &= \begin{bmatrix} 1-\cos T & \cos T + \sin^2 T - \cos^2 T \\ \sin T & -\sin T + 2\sin T\cos T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-\cos T & \cos T + \cos 2T \\ \sin T & -\sin T + \sin 2T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per $T = \pi$ il sistema non è completamente raggiungibile, infatti

$$\mathcal{R}^+_{T=\pi} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice $\mathcal{R}^+$ è:

$$|\mathcal{R}^+| = -2\sin T(1-\cos T)$$

In accordo con il teorema sulla raggiungibilità, il sistema a segnali campionati è raggiungibile se e solo se:

$$T \neq \frac{2k\pi}{\mathrm{Im}(\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{2k\pi}{2} = k\pi$$

Analoghe considerazioni valgono per la matrice di osservabilità:

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso, il sistema a segnali campionati è osservabile se e solo se $T \neq k\pi$.
Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{F}$ è:

$$|z\mathbf{I}-\mathbf{F}| = (z-\cos T)^2 + \sin^2 T$$

Gli autovalori della matrice $\mathbf{F}$ sono quindi i seguenti:

$$z_{1,2} = \cos T \pm j\sin T = e^{\pm jT}$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema continuo è:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{s^2+1}$$

La funzione di trasferimento $G(z)$ del corrispondente sistema a segnali campionati è:

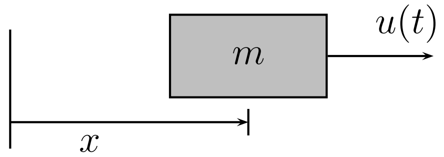
$$\begin{aligned}
G(z) &= \mathbf{H}(z\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-\cos T & -\sin T \\ \sin T & z-\cos T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1-\cos T \\ \sin T \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(z-\cos T)^2+\sin^2 T} \begin{bmatrix} -\sin T & z-\cos T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\cos T \\ \sin T \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sin T\cos T - \sin T + z\sin T - \sin T\cos T}{z^2-2\cos Tz+1} \\
&= \frac{\sin T(z-1)}{z^2-2\cos Tz+1}
\end{aligned}$$

Allo stesso risultato si sarebbe potuto giungere discretizzando la funzione $G(s)$ preceduta dal ricostruttore di ordine zero:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \mathcal{Z}\left[H_0(s)G(s)\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{s}{s^2+1}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{(s^2+1)}\right] \\
&= (1-z^{-1})\frac{z\sin T}{z^2-2\cos Tz+1} = \frac{\sin T(z-1)}{z^2-2\cos Tz+1}
\end{aligned}$$

Esempio. Si consideri il seguente sistema puramente inerziale di massa unitaria ($m = 1$) sottoposto ad una forza esterna $u(t)$:

$$m\ddot{x} = u(t)$$



Calcolare una retroazione statica dello stato di natura discreta, $u(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, che posizioni nell'origine tutti i poli del sistema retroazionato.

Sia $\mathbf{x}$ il vettore di stato:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad x_1 = x, \qquad x_2 = \dot{x}$$

La descrizione del sistema nello spazio degli stati è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Le matrici $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ del corrispondente sistema a segnali campionati sono:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B}\, d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

Il sistema a segnali campionati ha quindi la seguente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$\Delta_{\mathbf{F}}(z) = (z-1)^2 = z^2 - 2z + 1$$

Sia $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T$ la matrice di retroazione dello stato. Posto $u(k) = \mathbf{K}\mathbf{x}(k)$, si ottiene la seguente matrice di sistema

$$\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 + k_1\frac{T^2}{2} & T + k_2\frac{T^2}{2} \\ k_1 T & 1 + k_2 T \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice è il seguente:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K}} &= (z - 1 - k_1\tfrac{T^2}{2})(z - 1 - k_2 T) - k_1 T(T + k_2\tfrac{T^2}{2}) \\ &= z^2 - (2 + k_2 T + k_1\tfrac{T^2}{2})z + (1 + k_2 T - k_1\tfrac{T^2}{2}) \end{aligned}$$

Imponendo $\lambda_{\mathbf{F}+\mathbf{GK}} = z^2$ si ottiene:

$$\begin{cases} 2 + k_2 T + k_1 \frac{T^2}{2} = 0 \\ 1 + k_2 T - k_1 \frac{T^2}{2} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3 + 2k_2 T = 0 \\ 1 + k_1 T^2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k_2 = -\frac{3}{2T} \\ k_1 = -\frac{1}{T^2} \end{cases}$$

cioè

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T^2} & -\frac{3}{2T} \end{bmatrix}$$

Allo stesso risultato si poteva giungere anche procedendo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \frac{3}{2}T^2 \\ T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \frac{T^2}{2} \\ -T & T \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{T^3} \begin{bmatrix} T & -\frac{T^2}{2} \\ T & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T^2} & -\frac{3}{2T} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sostituendo, la matrice $\mathbf{F} + \mathbf{GK}$ assume la forma:

$$\mathbf{F} + \mathbf{GK} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Essendo un controllore dead-beat, la retroazione $u(k) = \mathbf{Kx}(t)$ è in grado di portare a zero (esattamente!) lo stato generico del sistema $x(0)$ in due soli passi e con un periodo si campionamento T comunque piccolo.
È evidente che l'azione di controllo $u(k)$ negli istanti $k = 0$ e $k = 1$ sarà tanto più elevata quanto più piccolo è il periodo di campionamento T. Si ha infatti che

$$u(0) = \mathbf{Kx}(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T^2} & -\frac{3}{2T} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

e

$$\begin{aligned} u(1) &= \mathbf{Kx}(1) = \mathbf{K}(\mathbf{F} + \mathbf{GK})\mathbf{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T^2} & -\frac{3}{2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{T}{4} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{1}{2T} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

Si noti che la capacità di poter portare a zero lo stato del sistema in un intervallo di tempo $2T$ non può essere ottenuto nel caso di sistemi tempo continuo. In questo caso, infatti, si tende a zero sempre in modo "esponenziale", cioè si giunge "esattamente" in zero solo per $t \rightarrow \infty$.

Se lo stato $x_2 = \dot{x}$ non è misurabile, si può procedere alla sintesi di un *osservatore dead-beat* *di ordine ridotto*. La trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{x}}$ porta il sistema ad assumere la forma

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}}^{-1} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{\mathbf{x}}(k+1) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} T \\ \frac{T^2}{2} \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \end{array} \right.$$

Dalla relazione $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{21} = 1 + \mathbf{L}T = 0$ si ricava $\mathbf{L} = -\frac{1}{T}$. L'osservatore dead beat di ordine ridotto assume quindi la forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \hat{v}(k) - \mathbf{L}y(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ \hat{v}(k) + \frac{y(k)}{T} \end{bmatrix}$$

dove

$$\hat{v}(k+1) = (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{22})y(k) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2)u(k) = -\frac{1}{T}y(k) + \frac{T}{2}u(k)$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema tempo continuo è

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

La funzione di trasferimento $G(z)$ del corrispondente sistema discreto è

$$\begin{aligned} G(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \begin{bmatrix} z-1 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \\ &= \frac{T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Anche in questo caso si può facilmente dimostrare che

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[H_0(s)G(s)\right] \\ &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\frac{1}{s^2}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^3}\right] \\ &= (1-z^{-1})\frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \\ &= \frac{T^2}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

Esempio. Discretizzazione del seguente modello linearizzato tempo continuo del pendolo inverso:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{M} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)
\end{aligned}$$

La matrice di trasferimento $G(s)$ di questo sistema vale:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{-\lambda^2}{gM(s-\lambda)(s+\lambda)}$$

Il modello discreto $(\mathbf{F},\ \mathbf{G},\ \mathbf{H})$ del corrispondente sistema a segnali campionati si determina nel modo seguente. Sia T il periodo di campionamento e sia $\lambda = \sqrt{\alpha g}$ il modulo dei due autovalori $\lambda_{1,2} = \pm\lambda$ della matrice A. Gli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ della matrice $\mathbf{A}$ sono:

$$\lambda_1 = -\lambda \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \end{bmatrix}, \qquad\qquad \lambda_2 = \lambda \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Posto $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$, la matrice $\mathbf{F}$ si calcola come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{T}e^{\bar{\mathbf{A}}}\mathbf{T}^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda T} & 0 \\ 0 & e^{\lambda T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\lambda} \\ 1 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{\lambda T} + e^{-\lambda T} & \dfrac{e^{\lambda T} - e^{-\lambda T}}{\lambda} \\ \lambda(e^{\lambda T} - e^{-\lambda T}) & e^{\lambda T} + e^{-\lambda T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda T) & \dfrac{\sinh(\lambda T)}{\lambda} \\ \lambda \sinh(\lambda T) & \cosh(\lambda T) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice $\mathbf{G}$, invece, assume la forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\, d\sigma = \int_0^T \begin{bmatrix} \cosh(\lambda T) & \frac{\sinh(\lambda T)}{\lambda} \\ \lambda\sinh(\lambda T) & \cosh(\lambda T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda^2}{gM} \end{bmatrix} d\sigma \\
&= \frac{1}{gM} \int_0^T \begin{bmatrix} -\lambda\sinh(\lambda\sigma) \\ -\lambda^2\cosh(\lambda\sigma) \end{bmatrix} d\sigma = \frac{1}{gM} \begin{bmatrix} -\cosh(\lambda\sigma) \\ -\lambda\sinh(\lambda\sigma) \end{bmatrix}_0^T \\
&= \frac{1}{gM} \begin{bmatrix} 1 - \cosh(\lambda T) \\ -\lambda\sinh(\lambda T) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Essendo $\mathbf{H} = \mathbf{C}$, il sistema a segnali campionati $(\mathbf{F},\ \mathbf{G},\ \mathbf{H})$ è:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda T) & \frac{\sinh(\lambda T)}{\lambda} \\ \lambda\sinh(\lambda T) & \cosh(\lambda T) \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{1-\cosh(\lambda T)}{gM} \\ -\frac{\lambda\sinh(\lambda T)}{gM} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\[2ex] y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Il sistema è raggiungibile e osservabile per qualunque valore di $T > 0$. Infatti, la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R}^+ = \frac{1}{gM} \begin{bmatrix} 1 - \cosh(\lambda T) & \cosh(\lambda T) - \cosh(2\lambda T) \\ \lambda\sinh(\lambda T) & \lambda[1 - 2\cosh(\lambda T)]\sinh(\lambda T) \end{bmatrix}$$

ha un determinante

$$\det \mathcal{R}^+ = -2\lambda \frac{[\cosh(\lambda T) - 1]\sinh(\lambda T)}{g^2 M^2}$$

che si annulla solo per $T = 0$. D'altra parte, anche la matrice di osservabilità

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cosh(\lambda T) & \frac{\sinh(\lambda T)}{\lambda} \end{bmatrix}$$

ha un determinante che annulla solo per $T = 0$. Si può facilmente dimostrare che la funzione di trasferimento $G(z)$ del sistema discreto è la seguente:

$$G(z) = \mathbf{H}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{G} = \frac{(z+1)[1 - \cosh(\lambda T)]}{gM(z - e^{\lambda T})(z - e^{-\lambda T})}$$

Per esercizio, lo studente può verificare che la stessa funzione di trasferimento $G(z)$ poteva essere ottenuta utilizzando la formula:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[H_0(s)G(s)\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{sT}}{s} G(s)\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

essendo $G(s)$ la funzione di trasferimento del corrispondente sistema tempo continuo:

$$G(s) = \frac{-\lambda^2}{gM(s - \lambda)(s + \lambda)}$$