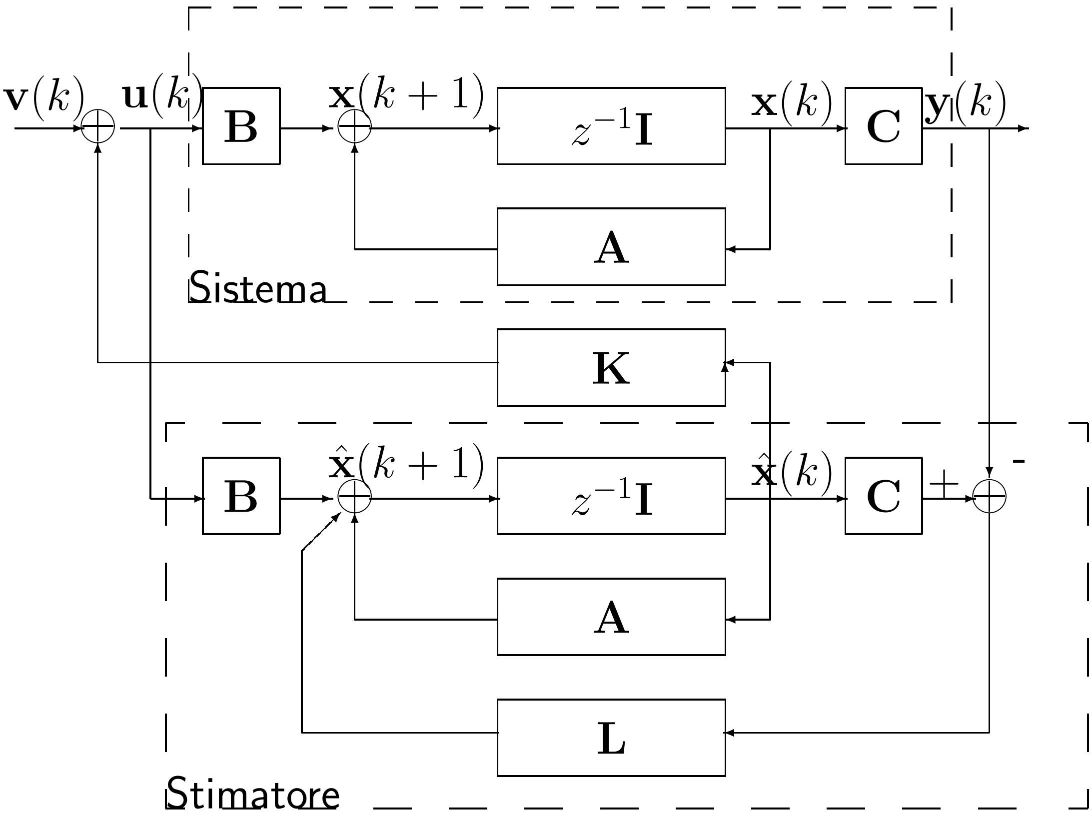
Sintesi del regolatore

- Si definisce *regolatore* il sistema composto dalla serie dello stimatore dello stato e dall'elemento statico di retroazione $\mathbf{K}$:



- Equazioni del sistema globale:

$$\text{Sistema:} \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

$$\text{Retroazione:} \quad \mathbf{u}(k) = \mathbf{v}(k) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k)$$

$$\text{Stimatore:} \quad \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}[\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{y}(k)]$$

- Eliminando $\mathbf{u}(k)$ si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k) \\ \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

- Il sistema ottenuto, descritto dalle matrici $(\overline{\mathbf{A}},\ \overline{\mathbf{B}},\ \overline{\mathbf{C}})$, è di dimensione $2n$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BK} \\ -\mathbf{LC} & \mathbf{A}+\mathbf{LC}+\mathbf{BK} \end{bmatrix}}^{\overline{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}}^{\overline{\mathbf{B}}} \mathbf{v}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}}^{\overline{\mathbf{C}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}$$

- Allo scopo di evidenziare alcune proprietà strutturali del sistema, si utilizza la seguente trasformazione di coordinate:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}$$

- La seconda parte del nuovo vettore di stato $\overline{\mathbf{x}}$ coincide con l'errore di stima $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$:

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

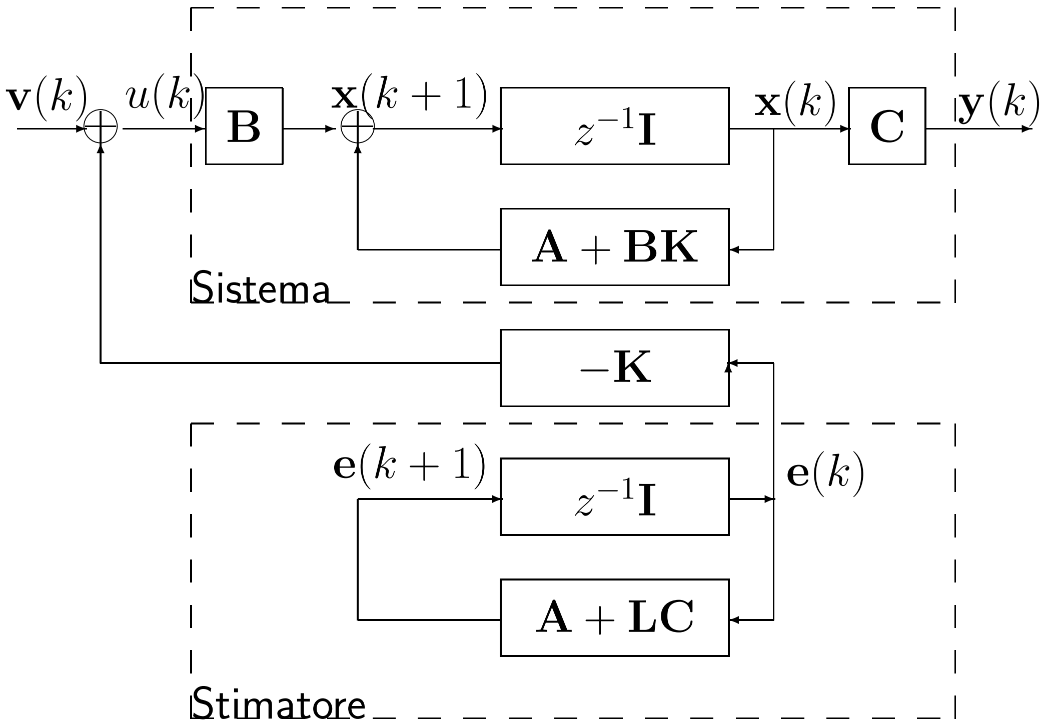
- Le nuove equazioni del sistema sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A}+\mathbf{LC} \end{bmatrix}}^{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathcal{B}} \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

  dove $\mathcal{A} = \mathbf{T}^{-1}\overline{\mathbf{A}}\mathbf{T}$, $\mathcal{B} = \mathbf{T}^{-1}\overline{\mathbf{B}}$ e $\mathcal{C} = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{T}$.

- Il sistema si trova in forma standard di raggiungibilità e i suoi autovalori sono l'unione degli autovalori delle due matrici $\mathbf{A}+\mathbf{BK}$ e $\mathbf{A}+\mathbf{LC}$.

- Una rappresentazione grafica del sistema trasformato è la seguente:



- La parte del sistema relativa alla stima dello stato è un sistema autonomo la cui uscita libera (funzione dell'errore di stima) agisce come ulteriore ingresso per la parte raggiungibile del sistema dinamico.

- La presenza dello stimatore non altera la relazione *ingresso–uscita* del sistema considerato. Infatti la matrice di trasferimento dell'intero sistema rimane la stessa sia retroazionando lo stato $\mathbf{x}$, che retroazionando la "stima dello stato $\hat{\mathbf{x}}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}(z) &= \overline{\mathbf{C}}(z\mathbf{I}-\overline{\mathbf{A}})^{-1}\overline{\mathbf{B}} = \mathcal{C}(z\mathbf{I}-\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1} & ****** \\ 0 & [z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{LC})]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{C}[z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{B}
\end{aligned}
$$

Proprietà di separazione

- La sintesi di:
  - Il blocco di retroazione, cioè l'allocazione degli autovalori del sistema $(\mathbf{A}+\mathbf{BK})$.
  - Il blocco di stima dello stato, cioè l'allocazione degli autovalori del sistema $(\mathbf{A}+\mathbf{LC})$.

  possono essere effettuate in modo indipendente, infatti vale la *proprietà di separazione* :

$$det(z\mathbf{I}-\overline{\mathbf{A}}) = det(z\mathbf{I}-\mathcal{A}) =$$

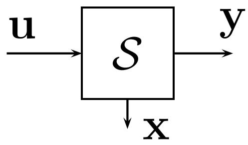
$$= det \begin{bmatrix} [z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})] & \mathbf{BK} \\ 0 & [z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{LC})] \end{bmatrix} =$$

$$= det[z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]det[z\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{LC})]$$

Sintesi del regolatore

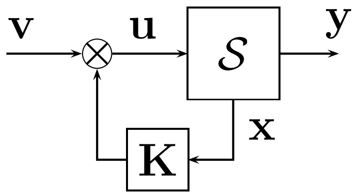
Sia dato un sistema dinamico $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

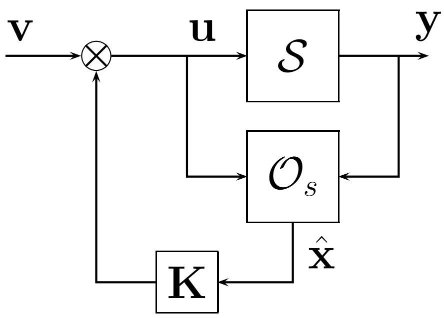


Se $(\mathbf{A},\ \mathbf{B})$ è raggiungibile, utilizzando una retroazione statica dello stato è possibile posizionare a piacere gli autovalori del sistema retroazionato $\mathcal{S}_K$:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$



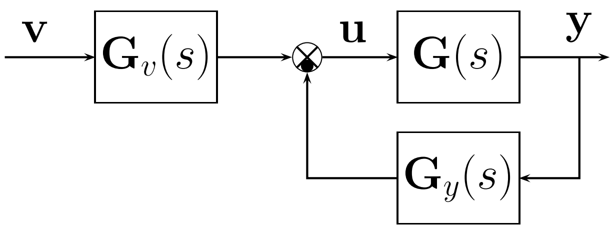
Se lo stato $\mathbf{x}$ non è accessibile, allora occorre introdurre nell'anello di controllo un osservatore dello stato. Lo schema di controllo che tipicamente si utilizza è il seguente:



$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t)$$
$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{v}(k)$$

Il sistema retroazionato può essere rappresentato anche nel modo seguente:



$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$
$$\mathbf{G}_y(s) = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{L}$$
$$\mathbf{G}_v(s) = 1 + \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$$

Nel caso di sistemi SISO, le funzioni di trasferimento $\mathbf{G}(s)$, $\mathbf{G}_y(s)$ e $\mathbf{G}_v(s)$ sono semplici funzioni razionali fratte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\mathbf{C}\,\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \\
\mathbf{G}_y(s) &= \frac{N_y(s)}{D_y(s)} = \frac{\mathbf{K}\,\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})\mathbf{L}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})} \\
\mathbf{G}_v(s) &= \frac{N_v(s)}{D_v(s)} = 1 + \frac{\mathbf{K}\,\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{K}\mathbf{B})}
\end{aligned}$$

Si noti che le due funzioni $\mathbf{G}_y(s)$ e $\mathbf{G}_v(s)$ sono caratterizzate dallo stesso polinomio a denominatore: $D_v(s) = D_y(s)$.
Calcolando la funzione di trasferimento complessiva $\mathbf{G}_0(s)$ si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_0(s) &= \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{V}(s)} = \frac{\mathbf{G}_v(s)\mathbf{G}(s)}{1+\mathbf{G}_y(s)\mathbf{G}(s)}\\ &= \frac{N_v(s)\,N(s)}{D_y(s)\,D(s)+N_y(s)\,N(s)}\end{aligned}$$

Imponendo che la $\mathbf{G}_0(s)$ coincida con una funzione desiderata $\mathbf{G}_d(s) = \frac{N_d(s)}{D_d(s)}$ si ottiene la relazione

$$\frac{N_v(s)\,N(s)}{D_y(s)\,D(s)+N_y(s)\,N(s)} = \frac{N_d(s)}{D_d(s)}\frac{A_0(s)}{A_0(s)}$$

dove $A_0(s)$ è la dinamica dell'osservatore che non è visibile nel legame ingresso-uscita. Tale relazione è equivalente ad una coppia di equazioni polinomiali da risolvere nelle incognite $N_v(s)$, $N_y(s)$e $D_y(s)$:

$$N_v(s)\,N(s) = N_d(s)\,A_0(s)$$

$$D_y(s)\,D(s)+N_y(s)\,N(s) = D_d(s)\,A_0(s)$$