Raggiungibilità e controllabilità

- *Raggiungibilità*.
  Il problema della raggiungibilità consiste nel determinare l'insieme di *stati raggiungibili da un determinato stato iniziale*:

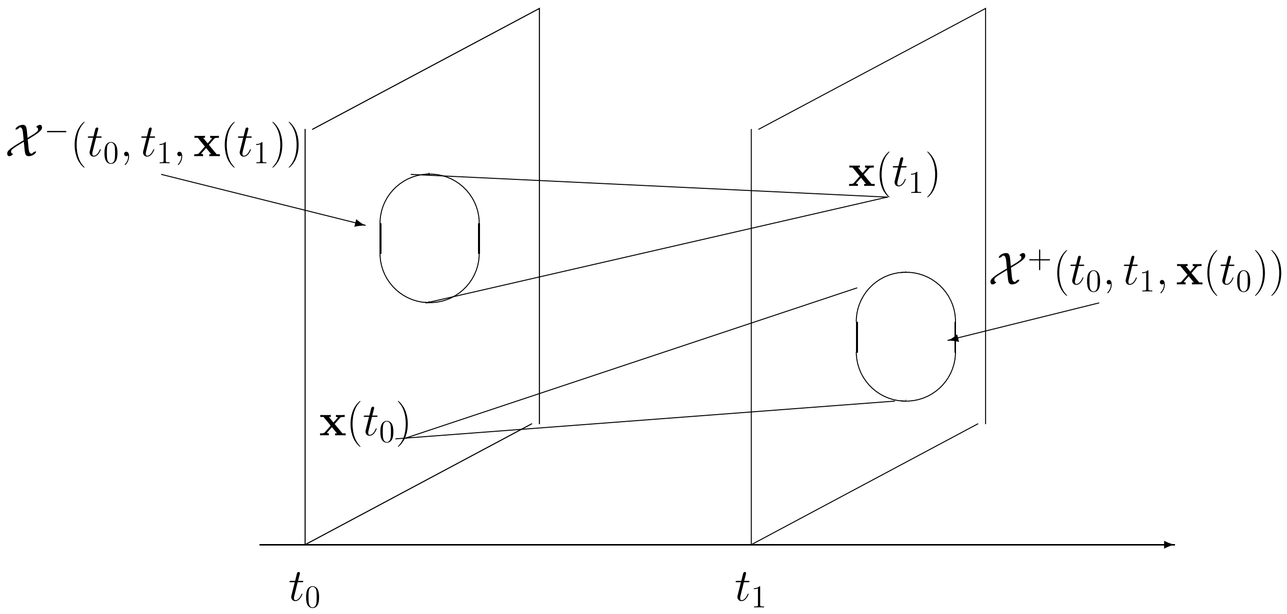
  – Uno stato $\mathbf{x}(t_1)$ di un sistema dinamico è raggiungibile dallo stato $\mathbf{x}(t_0)$ nell'intervallo temporale $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $\mathbf{x}(t_1) = \psi(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(\cdot))$.

  – Indicheremo con $\mathcal{X}^+(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0))$ l'*insieme degli stati raggiungibili* dall'evento $\{t_0, \mathbf{x}(t_0)\}$ all'istante t_1.

- *Controllabilità*.
  Il problema della controllabilità consiste nel determinare l'insieme di stati controllabili a un determinato *stato finale*:

  – Uno stato $\mathbf{x}(t_0)$ di un sistema dinamico è controllabile allo stato $\mathbf{x}(t_1)$ nell'intervallo temporale $[t_0, t_1]$ se esiste una funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ tale che $\mathbf{x}(t_1) = \psi(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(\cdot))$.

  – Indicheremo con $\mathcal{X}^-(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_1))$ l'*insieme degli stati controllabili* all'evento $\{t_1, \mathbf{x}(t_1)\}$ dall'istante t_0.



- Nel caso di sistemi *invarianti*, gli insiemi $\mathcal{X}^+(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0))$ e $\mathcal{X}^-(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_1))$ sono funzioni solo della differenza $t_1 - t_0$. Per questi sistemi è possibile porre $t_0 = 0$ senza perdere di generalità:

  $\mathcal{X}^+(t_1, \mathbf{x}(0))$ è l'insieme degli stati raggiungibili dallo stato $\mathbf{x}(0)$ nell'intervallo di tempo $[0,\ t_1]$;

  $\mathcal{X}^-(t_1, \mathbf{x}(t_1))$ è l'insieme degli stati controllabili allo stato $\mathbf{x}(0)$ nell'intervallo di tempo $[0,\ t_1]$.

- Nel caso di sistemi lineari invarianti, tipicamente si studia la raggiungibilità e la controllabilità dell'origine $\mathbf{x}(0) = 0$. In questo caso:

  $\mathcal{X}^+(t_1)$ rappresenta l'insieme degli stati raggiungibili dall'origine nell'intervallo di tempo $[0,\ t_1]$

  $\mathcal{X}^-(t_1)$ rappresenta l'insieme degli stati controllabili all'origine nell'intervallo di tempo $[0,\ t_1]$.

- Quando $t_1 \to \infty$ si utilizza la seguente notazione:

  $\mathcal{X}^+$ rappresenta l'insieme degli stati raggiungibili dall'origine in un intervallo di tempo di lunghezza qualsiasi;

  $\mathcal{X}^-$ rappresenta l'insieme degli stati controllabili all'origine in un intervallo di tempo di lunghezza qualsiasi.

Raggiungibilità: sistemi invarianti discreti

Consideriamo il sistema lineare discreto descritto dall'equazione di stato:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

L'insieme $\mathcal{X}^+(k)$ degli stati *raggiungibili* dall'origine in k passi è l'insieme degli stati $\mathbf{x}(k)$ che si ottengono dall'evoluzione forzata del sistema

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j) = [\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{u}(k-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

quando gli ingressi $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$ vengono fatti variare in tutti i modi possibili.

Indichiamo con

$$\boxed{\mathcal{R}^+(k) \stackrel{\triangle}{=} [\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]}$$

la *matrice di raggiungibilità* del sistema in k passi.

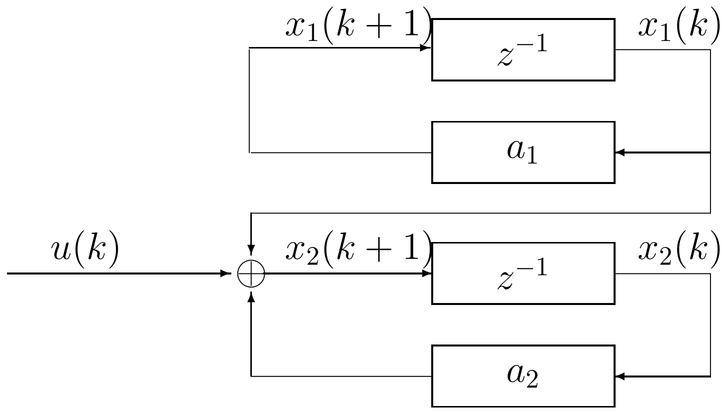
Risulta chiaro dalla precedente relazione che uno stato $\mathbf{x}(k)$ è *raggiungibile in k passi*, $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{X}^+(k)$, se e solo se può essere espresso come combinazione lineare delle colonne della matrice $\mathcal{R}^+(k)$.

L'insieme $\mathcal{X}^+(k)$ degli stati *raggiungibili* dall'origine in k passi coincide quindi con l'immagine della matrice $\mathcal{R}^+(k)$:

$$\boxed{\mathcal{X}^+(k) = \mathrm{Im}[\mathcal{R}^+(k)]}$$

L'insieme $\mathcal{X}^+(k)$ degli stati raggiungibili in k passi ha quindi la struttura di spazio vettoriale.

Esempio. Consideriamo il sistema discreto rappresentato dal seguente schema:



Le equazioni di aggiornamento dello stato del sistema sono:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u(k)$$

Il sottospazio raggiungibile in k passi è:

$$\mathcal{X}^+(k) = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{k-1} \end{bmatrix} = \mathrm{span}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato è giustificabile intuitivamente, osservando dallo schema che, se lo stato iniziale è nullo, allora la componente di stato x_1 rimarrà nulla, in quanto l'ingresso non può agire in alcun modo su x_1.

Nota. Se il vettore $\mathbf{B}$ avesse la seguente struttura:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

il sistema risulterebbe essere raggiungibile in 2 passi:

$$\mathcal{X}^+(2) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^2$$

Sottospazio raggiungibile.

- I sottospazi $\mathcal{X}^+(k)$ raggiungibili in $1, 2, \ldots, k$ passi soddisfano la seguente catena di inclusioni:

$$\mathcal{X}^+(1) \subseteq \mathcal{X}^+(2) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{X}^+(k) \subseteq \ldots$$

- Per il teorema di Cayley-Hamilton, questa catena di inclusioni è stazionaria per $k \geq n$, dove n è la dimensione dello spazio degli stati:

$$\mathcal{X}^+(1) \subseteq \mathcal{X}^+(2) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{X}^+(n) = \mathcal{X}^+(n+1) = \ldots$$

- Quindi uno stato, se è raggiungibile, lo è al più in n passi.
- Indichiamo con $\mathcal{R}^+$ la *matrice di raggiungibilità* del sistema:

$$\mathcal{R}^+ \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{R}^+(n) = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

- Il sottospazio $\mathcal{X}^+$ degli stati *raggiungibili* dall'origine in un'intervallo di tempo qualsiasi è dato dall'immagine della matrice $\mathcal{R}^+$:

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+$$

- *Definizione*. Un sistema si dice *completamente raggiungibile* (o *raggiungibile*) se il sottospazio $\mathcal{X}^+$ degli stati raggiungibili dall'origine coincide con l'intero spazio degli stati $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{X}^+ = \mathbf{X}$$

- Condizione *necessaria e sufficiente* affinchè un sistema sia raggiungibile è:

$$\boxed{rango(\mathcal{R}^+) = n}$$

- *Definizione*. L'*indice di raggiungibilità* di un sistema raggiungibile è il più piccolo intero r tale per cui:

$$rango[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}] = n$$

Controllabilità: sistemi invarianti discreti

Consideriamo il sistema lineare discreto descritto dalla equazione di stato:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

Uno stato $\mathbf{x}(0)$ è *controllabile allo stato zero in k passi* se esiste una successione di ingresso $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \ldots, \mathbf{u}(k-1)$ che porta il sistema dallo stato $\mathbf{x}(0)$ allo stato $\mathbf{x}(k) = 0$ nell'intervallo di tempo $[0, k]$, ovvero se:

$$0 = \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

Quindi uno stato $\mathbf{x}(0)$ è *controllabile a zero in k passi*, $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^-(k)$, se:

$$-\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)}\mathbf{B}\mathbf{u}(j) \qquad \leftrightarrow \qquad \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+(k)$$

cioè se lo stato "$-\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$" è raggiungibile in k passi a partire dallo stato zero.

Notazione. Indichiamo con $\mathcal{X}^-(k)$ il *sottospazio degli stati controllabili a zero in k passi*:

$$\mathcal{X}^-(k) = \{\mathbf{x} \,:\, \mathbf{A}^k\mathbf{x} \in \mathcal{X}^+(k)\}$$

Definizione. Un sistema è *controllabile in k passi* se l'insieme $\mathcal{X}^-(k)$ coincide con l'intero spazio degli stati $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{X}^-(k) = \mathbf{X}$$

Proprietà. Un sistema è *controllabile in k passi* se per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ vale la relazione

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} \in \mathcal{X}^+(k) = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]$$

cioè se:

$$\boxed{\mathrm{Im}(\mathbf{A}^k) \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)}$$

Notazione. Indichiamo con $\mathcal{X}^-$ il *sottospazio degli stati controllabili a zero*:

$$\mathcal{X}^- = \{\mathbf{x} \,:\, \exists k \,:\, \mathbf{A}^k\mathbf{x} \in \mathcal{X}^+(k)\}$$

Definizione. Un sistema è *controllabile* se l'insieme $\mathcal{X}^-$ coincide con l'intero spazio degli stati $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{X}^- = \mathbf{X}$$

Proprietà. Un sistema è controllabile *se e solo se* è controllabile in n passi, cioè *se e solo se* vale la relazione:

$$\boxed{\mathrm{Im}\mathbf{A}^n \subseteq \mathcal{X}^+(n) = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+}$$

Dimostrazione. (Se). Se il sistema è controllabile in n passi, allora è controllabile per definizione. (Solo se). Se il sistema è controllabile in $k \leq n$ passi, allora esso è anche controllabile in n passi in quanto è sempre possibile scegliere come ingresso quello che porta lo stato a zero in k passi e poi scegliendo $\mathbf{u}(k) = 0$, $\mathbf{u}(k+1) = 0$, ..., $\mathbf{u}(n-1) = 0$ mantenere lo stato a zero. Se il sistema è controllabile in $k > n$ si ha che:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^n = \mathrm{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Per i sistemi discreti le proprietà di raggiungibilità e controllabilità **non** sono equivalenti:

- La raggiungibilità implica la controllabilità.

  $$\boxed{\text{raggiungibilità} \Longrightarrow \text{controllabilità}}$$

  Infatti l'ipotesi di raggiungibilità implica $\mathcal{X}^+(n) = \mathbf{X}$ dalla quale segue che: $\mathrm{Im}\mathbf{A}^n \subseteq= \mathcal{X}^+ = \mathbf{X}$, cioè il sistema è sicuramente controllabile.

- La controllabilità non implica la raggiungibilità:

  $$\boxed{\text{controllabilità} \not\Longrightarrow \text{raggiungibilità}}$$

  Infatti, se per esempio $\mathbf{A} = 0$ e $rango(\mathbf{B}) < n$, allora:

  $$rango([\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]) = rango([\mathbf{B}\ 0\ \ldots\ 0] < n$$

  cioè il sistema non è raggiungibile pur essendo controllabile.

- Se $rango\mathbf{A} = n$ la raggiungibilità e la controllabilità si implicano a vicenda.

Nota. La differenza sostanziale tra la raggiungibilità e la controllabilità consiste nel fatto che *uno stato* $\mathbf{x}$ *puó essere controllato a zero anche senza applicare* *ingressi*: questo può accadere grazie solo se la matrice $\mathbf{A}$ non è a rango pieno, cioè se ha almeno un autovalore nullo. In questo caso il corrispondente "autospazio" tende a zero in un numero finito di passi senza applicare ingressi.

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

Esempio. Consideriamo il sistema discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Il sistema non è completamente raggiungibile:

$$\mathcal{X}^+(1) = \mathrm{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}^+(2) = \mathcal{X}^+(3) = \ldots = \mathrm{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La parte raggiungibile del sistema viene raggiunta in 2 passi: $SotRag = SotRag(2)$.

Il sistema non è controllabile in un passo:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A} = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \not\subseteq \mathrm{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{X}^+(1)$$

ma è controllabile in due passi:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^2 = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

I sottospazi controllabili $\mathcal{X}^-(1)$ e $\mathcal{X}^-(2)$ sono i seguenti:

$$\mathcal{X}^-(1) = \mathrm{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{X}^-(2) = \mathrm{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nota: i due sottospazi $\mathcal{X}^+(1)$ e $\mathcal{X}^-(1)$ non coincidono.

Esempio. Dato il sistema discreto $[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),\ y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)]$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) &=& \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &=& \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{array}\right.$$

calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ che nel più breve tempo possibile porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = [0\ 0\ 1]^\top$ allo stato finale $\mathbf{x}_f = [2\ 0\ 1]^\top$.
Il sistema non è completamente raggiungibile

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det \mathcal{R}^+ = 0$$

per cui non è detto che il problema ammetta soluzioni. Per calcolare la sequenza di ingresso $u(k)$ occorre calcolare in quanti passi k lo stato $\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ è raggiungibile. Per $k = 1$

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \not\in \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\mathbf{B}$$

Per $k = 2$ si ha:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \not\in \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B}]$$

Per $k = 3$ si ha:

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi la transizione è possibile solo in 3 passi. La sequenza cercata soddisfa la relazione

$$\mathbf{x}_f - \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

da cui si ha

$$\begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

dove α è un parametro arbitrario dovuto al fatto che il sistema non è completamente controllabile.

Raggiungibilità: sistemi invarianti continui

Consideriamo il sistema lineare continuo descritto dall'equazione di stato:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

e cerchiamo di determinare l'insieme $\mathcal{X}^+(t)$ degli stati raggiungibili dallo stato $\mathbf{x}(0) = 0$ nell'intervallo di tempo $[0,\ t]$.

Uno stato $\mathbf{x}(t)$ è *raggiungibile* al tempo t se esiste un ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ tale che il *movimento forzato* del sistema valga:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

indichiamo con R_t l'operatore lineare $R_t : \mathcal{U} \rightarrow X$ così definito:

$$R_t : \mathbf{u}(\cdot) \rightarrow \mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

<u>Nota</u>: l'insieme $\mathcal{U}$ è infinito dimensionale. Gli stati $\mathbf{x}(t)$ raggiungibili al tempo t sono quindi tutti e soli quelli che appartengono all'*immagine* di R_t:

$$\mathcal{X}^+(t) = \{\mathbf{x}\ :\ \mathbf{x} \in \mathrm{Im} R_t\}$$

L'insieme $\mathcal{X}^+(t)$, essendo l'immagine di un operatore lineare, *è un sottospazio vettoriale* dello spazio degli stati $\mathbf{X}$.

<u>*Proprietà*</u>. Per qualsiasi $t > 0$, il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+(t)$ è l'immagine della matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$:

$$\boxed{\mathcal{X}^+(t) = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+}$$

<u>*Prova*</u>. L'operatore aggiunto $R_t^* : X \rightarrow \mathcal{U}$:

$$R_t^* : \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)}\mathbf{x}(t) \qquad\qquad 0 \leq \tau \leq t$$

gode della seguente proprietà:

$$\mathrm{Im} R_t = (ker R_t^*)^\perp = \mathrm{Im} R_t R_t^* = \mathrm{Im} W_t$$

dove con W_t si è indicato il <u>*gramiano di raggiungibilità*</u>:

$$W_t = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{T} e^{\mathbf{A}^\mathsf{T}(t-\tau)}d\tau$$

In base alle proprietà dell'*operatore aggiunto* valgono le relazioni:

$$a)\quad \mathcal{X}^+(t) = \mathrm{Im} R_t = (ker R_t^*)^\perp \qquad b)\ \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = (ker \mathcal{R}^{+^T})^\perp$$

Per dimostrare che $\mathcal{X}^+(t) = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+$ è quindi sufficiente dimostrare che:

$$(ker R_t^*)^\perp = (ker \mathcal{R}^{+^T})^\perp \quad \Rightarrow \quad ker R_t^* = ker \mathcal{R}^{+^T}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}(t) \in ker R_t^* \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)}\mathbf{x}(t), \quad 0 \le \tau \le t \overset{(1)}{\Leftrightarrow}\\
&\Leftrightarrow 0 = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^i \mathbf{x}(t)\frac{(t-\tau)^i}{i!}, \quad 0 \le \tau \le t \overset{(2)}{\Leftrightarrow}\\
&\Leftrightarrow 0 = \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^i \mathbf{x}(t), \quad i = 0, 1, \ldots \overset{(3)}{\Leftrightarrow}\\
&\Leftrightarrow 0 = \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^i \mathbf{x}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}(t) \in ker \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix} = ker \mathcal{R}^{+^T}
\end{aligned}$$

(1) - Per la definizione della matrice esponenziale,

(2) - per il principio di identità delle serie di potenze,

(3) - per il teorema di Cayley-Hamilton

Nota. A differenza di quanto accade per i sistemi discreti, il sottospazio raggiungibile *non dipende dalla lunghezza dell'intervallo* $[0, t)$ in cui agisce la funzione di ingresso.

Nota. Condizione necessaria affinchè il sottospazio raggiungibile non dipenda dalla lunghezza dell'intervallo di applicazione dell'ingresso è *che l'ingresso possa assumere valori arbitrariamente grandi*.

Ovviamente nella pratica ciò non è possibile, quindi, in realtà l'insieme degli stati raggiungibili dipende dal tempo di applicazione e dalla entità dell'ingresso.

Questo non contraddice la teoria, in quanto nella realtà lo spazio degli ingressi ammissibili cessa di essere uno spazio vettoriale, in quanto tali elementi hanno valore finito, e quindi cessa di essere valida una ipotesi fondamentale del teorema precedente.

Controllabilità: sistemi invarianti continui

Consideriamo il sistema lineare continuo descritto dalla equazione di stato:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Proprietà. Per sistemi lineari tempo continui invarianti, il sottospazio controllabile $\mathcal{X}^-$ non dipende dall'intervallo in cui agisce il controllo e coincide con il sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$.

Prova. Uno stato $\mathbf{x}(0)$ è controllabile a $\mathbf{x}(t) = 0$ se esiste un ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ tale che:

$$0 = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

L'insieme di tutti gli $\mathbf{x}(0)$ che soddisfano la precedente relazione, al variare della funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$, costituiscono il *sottospazio di controllabilità* $\mathcal{X}^-(t)$.

La relazione tra lo spazio di controllabilità e quello di raggiungibilità si ottiene considerando che, per una opportuna scelta della funzione di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ogni elemento di $\mathcal{X}^+$ può essere espresso come:

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

cioè come immagine secondo $e^{\mathbf{A}t}$ di uno stato controllabile, per cui:

$$e^{\mathbf{A}t}\mathcal{X}^-(t) = \mathcal{X}^+$$

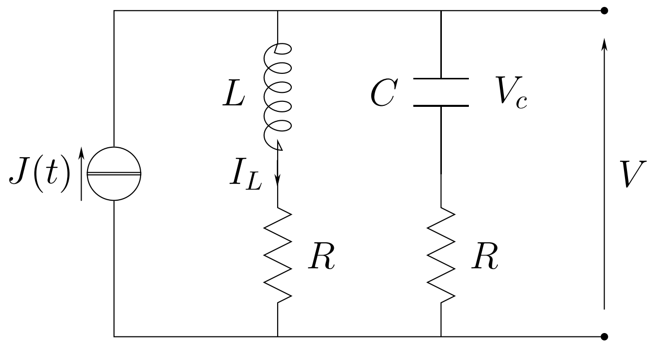
Per l'*invertibilità* di $e^{-\mathbf{A}t}$ si ha:

$$\mathcal{X}^-(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathcal{X}^+$$

Ricordando che $\mathcal{X}^+$ è $\mathbf{A}$-invariante, e quindi $e^{-\mathbf{A}t}$-invariante, si ha che:

$$\mathcal{X}^-(t) = \mathcal{X}^- = \mathcal{X}^+$$

Esempio. Si consideri la seguente rete elettrica:



Le equazioni dinamiche del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} L\dfrac{d\,I_L}{dt} &= V_C + R(J - I_L) - R\,I_L \\ C\dfrac{d\,V_C}{dt} &= J - I_L \\ V &= V_C + R(J - I_L) \end{cases}$$

dove I_L è la corrente che scorre nell'induttanza, V_C la tensione ai capi del condensatore, J la corrente in ingresso e V la tensione di uscita. In forma matriciale, la dinamica del sistema è:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{-2R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{-1}{C} & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} J \\ V &= \begin{bmatrix} -R & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + [\,R\,]J \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix}$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & \frac{1}{LC} - \frac{2R^2}{L^2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{LC} \end{bmatrix}, \qquad \det \mathcal{R}^+ = \frac{1}{LC}\left[\frac{R^2}{L} - \frac{1}{C}\right]$$

Il sistema è raggiungibile solo se $\mathcal{R}^+$ ha rango pieno. Il sistema non è completamente raggiungibile se

$$R^2 = \frac{L}{C} \qquad \leftrightarrow \qquad R\,C = \frac{L}{R}$$

cioè se la costante di tempo dell'induttanza è uguale a quella della capacità, cioè quando i due autovalori del sistema coincidono: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Sistemi equivalenti

Proprietà. Sistemi (discreti o continui) *algebricamente equivalenti* hanno le stesse proprietà di raggiungibilità.

Sia $\mathbf{T}$ la matrice di trasformazione (non–singolare) che rende algebricamente equivalenti i due sistemi lineari invarianti $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$ ed $\bar{\mathcal{S}} = (\overline{\mathbf{A}},\ \overline{\mathbf{B}},\ \overline{\mathbf{C}},\ \overline{\mathbf{D}})$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, & \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, & \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \end{cases}$$

I sottospazi raggiungibili in k passi dei due sistemi $\mathcal{S}$ ed $\bar{\mathcal{S}}$ sono legati tra loro dalla seguente relazione:

$$\overline{\mathcal{X}}^{+}(k) = \mathrm{Im}[\overline{\mathbf{B}} \dots \overline{\mathbf{A}}^{k-1}\overline{\mathbf{B}}] = \mathrm{Im}(\mathbf{T}^{-1}[\mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]) = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{X}^{+}(k)$$

Siano $\mathcal{R}^{+}$ e $\overline{\mathcal{R}}^{+}$ le *matrici di raggiungibilità* dei due sistemi. Per $k = n$ vale la relazione:

$$\boxed{\overline{\mathcal{R}}^{+} = \mathbf{T}^{-1}\mathcal{R}^{+}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\mathcal{R}^{+} = \mathbf{T}\,\overline{\mathcal{R}}^{+}}$$

Nel caso di sistemi raggiungibili questa relazione consente di calcolare la matrice di trasformazione $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T}\,\overline{\mathcal{R}}^{+}\overline{\mathcal{R}}^{+^T} = \mathcal{R}^{+}\overline{\mathcal{R}}^{+^T} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{T} = \mathcal{R}^{+}\overline{\mathcal{R}}^{+^T}(\overline{\mathcal{R}}^{+}\overline{\mathcal{R}}^{+^T})^{-1}}$$

Se i sistemi hanno un solo ingresso, $\mathcal{R}^{+}$ e $\overline{\mathcal{R}}^{+}$ sono quadrate e non singolari, per cui vale la semplice relazione:

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathcal{R}^{+}(\overline{\mathcal{R}}^{+})^{-1}}$$