

Polinomio minimo

Definizione. Dicesi *polinomio minimo della matrice* $\mathbf{A}$ il polinomio monico di grado minimo $m(\lambda)$ che annulla la matrice $\mathbf{A}$:

$$m(\mathbf{A}) = 0$$

Proprietà. Il polinomio minimo $m(\lambda)$ è un divisore di qualsiasi altro polinomio $p(\lambda)$ annullante per la matrice $\mathbf{A}$.

$$p(\mathbf{A}) = 0 \quad \rightarrow \quad p(\lambda) = m(\lambda)b(\lambda)$$

Teorema di Cayley-Hamilton. Il polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$ è un polinomio annullante della matrice stessa.

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = 0$$

Proprietà. Il polinomio minimo $m(\lambda)$ della matrice $\mathbf{A}$ ha le stesse radici del polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Ogni radice del polinomio minimo ha grado di molteplicità minore o uguale a quello che la radice stessa ha nel polinomio caratteristico.

Esempio. Si considerino le seguenti tre matrici:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le tre matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico, $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, ma diverso polinomio minimo:

$$m_1(\lambda) = (\lambda - 1), \quad m_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2, \quad m_3(\lambda) = (\lambda - 1)^3$$

Proprietà. Il polinomio minimo $m(\lambda)$ può essere determinato utilizzando la seguente relazione:

$$m(\lambda) = \frac{\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)}{b(\lambda)}$$

dove $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)$ è il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ e $b(\lambda)$ è il massimo comun divisore della matrice $\text{agg}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Esempio. Sia data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ è

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

La matrice aggiunta della matrice

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

è la seguente

$$\text{agg}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda - 1) & (\lambda - 1) & 0 \\ (\lambda - 1) & \lambda(\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{bmatrix}$$

Il massimo comun divisore $b(\lambda)$ della matrice $\text{agg}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ è $b(\lambda) = (\lambda - 1)$.

Il polinomio minimo della matrice $\mathbf{A}$ è quindi il seguente

$$m(\lambda) = \frac{\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda)}{b(\lambda)} = \frac{(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Poichè ogni autovalore compare nel polinomio minimo con grado unitario di molteplicità, ne segue che la matrice $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile, cioè esistono nello spazio degli stati tre autovettori della matrice $\mathbf{A}$ linearmente indipendenti fra loro. Verifichiamo che il polinomio

$$m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 1$$

sia un polinomio annullante per la matrice $\mathbf{A}$. Sostituendo la matrice $\mathbf{A}$ nella forma fattorizzata del polinomio minimo si ottiene

$$m(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo stesso risultato si ottiene se si utilizza la forma polinomiale del polinomio minimo $m(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{I}$: