Rappresentazione in s dei sistemi lineari continui.

Applicando la trasformazione di Laplace alle funzioni di *stato* ed *uscita* di un sistema lineare:

$$\mathcal{L}\left(\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{l}s\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}_0=\mathbf{A}\mathbf{x}(s)+\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}(s)=\mathbf{C}\mathbf{x}(s)+\mathbf{D}\mathbf{u}(s)\end{array}\right)$$

e quindi:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{u}(s)\end{cases}$$

- Quando $\mathbf{u}(t)=0, \forall t\geq 0$, si ha l'<u>*evoluzione libera*</u>:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0\end{cases}\qquad\leftrightarrow\qquad\begin{cases}\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0\end{cases}$$

  da cui si ricava che

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t}=\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]}$$

- Quando $\mathbf{x}_0=0$, si ha l'<u>*evoluzione forzata*</u>:

$$\begin{cases}\mathbf{x}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)\\ \mathbf{y}(s)=[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{u}(s)\end{cases}$$

- L'*inversa* di una matrice $\mathbf{M}$ quadrata di ordine n non singolare, è definita come segue:

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{\operatorname{agg}\mathbf{M}}{\det\ \mathbf{M}}$$

  La *matrice aggiunta*, $\operatorname{agg}\mathbf{M}$, è la *trasposta* (coniugata trasposta) della matrice dei complementi algebrici $M_{i,j}$ della matrice $\mathbf{M}$.

  Il complemento algebrico $M_{i,j}$ è $(-1)^{i+j}$ volte il determinante della matrice $(n-1)\times(n-1)$ che si ottiene eliminando la $i-$esima riga e la $j-$esima colonna di $\mathbf{M}$.

Matrice di trasferimento.

La matrice *razionale propria* di dimensioni $(p \times m)$:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{C}\ \mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\ \mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Le funzioni razionali nella matrice $\mathbf{H}(s) - \mathbf{D}$ sono strettamente proprie in quanto

- $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è un polinomio di grado n,
- $\mathbf{C}\ \mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\ \mathbf{B}$ è una matrice polinomiale i cui elementi hanno gradi uguali a $n - 1$ (o minori, nel caso vi siano cancellazioni di fattori comuni nel numeratore e nel denominatore delle frazioni polinomiali).

Esempio. Consideriamo un sistema in forma diagonale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

La funzione di transizione $e^{\mathbf{A}t}$ si calcola nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{\mathbf{A}t}\right] &= (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathrm{agg}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} (s-a_{2,2})(s-a_{3,3}) & 0 & 0 \\ 0 & (s-a_{1,1})(s-a_{3,3}) & 0 \\ 0 & 0 & (s-a_{1,1})(s-a_{2,2}) \end{bmatrix}}{(s-a_{1,1})(s-a_{2,2})(s-a_{3,3})} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s-a_{1,1})} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(s-a_{2,2})} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(s-a_{3,3})} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

La matrice di trasferimento ha la forma seguente:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}(s) &= \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-a_{1,1})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-a_{2,2})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-a_{3,3})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b_{1,1}}{(s-a_{1,1})} & \frac{b_{1,2}}{(s-a_{1,1})} \\ \frac{b_{2,1}}{(s-a_{2,2})} & \frac{b_{2,2}}{(s-a_{2,2})} \\ \frac{b_{3,1}}{(s-a_{3,3})} & \frac{b_{3,2}}{(s-a_{3,3})} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{c_{1,1}b_{1,1}}{(s-a_{1,1})} + \frac{c_{1,2}b_{2,1}}{(s-a_{2,2})} + \frac{c_{1,3}b_{3,1}}{(s-a_{3,3})}; & \frac{c_{1,1}b_{1,2}}{(s-a_{1,1})} + \frac{c_{1,2}b_{2,2}}{(s-a_{2,2})} + \frac{c_{1,3}b_{3,2}}{(s-a_{3,3})} \\ \frac{c_{2,1}b_{1,1}}{(s-a_{1,1})} + \frac{c_{2,2}b_{2,1}}{(s-a_{2,2})} + \frac{c_{2,3}b_{3,1}}{(s-a_{3,3})}; & \frac{c_{2,1}b_{1,2}}{(s-a_{1,1})} + \frac{c_{2,2}b_{2,2}}{(s-a_{2,2})} + \frac{c_{2,3}b_{3,2}}{(s-a_{3,3})} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Esempio. Calcolare l'esponenziale di matrice della matrice $\mathbf{A}$

$$e^{\mathbf{A}t} \qquad \text{dove} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

Si ottiene quindi che

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Antitrasformando i singoli termini di questa matrice si ottiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right] = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}\right] = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

per cui, sostituendo, si ha che

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

cioè si ottiene esattamente la stessa espressione ottenuta utilizzando la forma canonica di Jordan della matrice $\mathbf{A}$.

Rappresentazione in z dei sistemi lineari discreti.

Applicando la trasformazione "$\mathcal{Z}$" alle funzioni di *stato* ed *uscita* di un sistema lineare:

$$\mathcal{Z}\left(\begin{array}{l} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} z(\mathbf{x}(z) - \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{B}\mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{x}(z) + \mathbf{D}\mathbf{u}(z) \end{array}\right)$$

e quindi:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}_0 + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}_0 + [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(z) \end{array}\right.$$

- Quando $\mathbf{u}(k) = 0, \forall t \geq 0$, si ha l'*evoluzione libera*:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}_0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 \end{array}\right.$$

- Quando $\mathbf{x}_0 = 0$, si ha l'*evoluzione forzata*:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(z). \\ \mathbf{y}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(z). \end{array}\right.$$

- Vale la relazione:

$$z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathcal{Z}[\mathbf{A}^k]$$

  da cui si ricava che:

$$\boxed{\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]}$$

Matrice di trasferimento.

La matrice *razionale propria* di dimensioni $(p \times m)$:

$$\frac{\mathbf{y}(z)}{\mathbf{u}(z)} = \mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{C}\ \mathrm{agg}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\ \mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Le funzioni razionali nella matrice $\mathbf{H}(z) - \mathbf{D}$ sono strettamente proprie in quanto

- $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è un polinomio di grado n,
- $\mathbf{C}\ \mathrm{agg}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\ \mathbf{B}$ è una matrice polinomiale i cui elementi hanno gradi uguali a $n - 1$ (o minori, nel caso vi siano cancellazioni di fattori comuni nel numeratore e nel denominatore delle frazioni polinomiali).

Esempio. Calcolare l'evoluzione libera del seguente sistema discreto autonomo

$$\mathbf{x}(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k)$$

a partire dalla condizione iniziale $x(0) = \mathbf{x}_0$. Il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ sono: $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. La soluzione del problema posto è formalmente nota:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$$

Vengono ora mostrati tre modi diversi di calcolare la matrice $\mathbf{A}^k$.

Modo I. Uso della forma canonica di Jordan. Si calcolano gli autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ corrispondenti agli autovalori λ_1 e λ_2 e si opera una trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ nello spazio degli stati

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

in modo da diagonalizzare la matrice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{A}^k$ si calcola come segue

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= (\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1})^k = \mathbf{T}\mathbf{D}^k\mathbf{T}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<u>Modo II</u>. Uso delle $\mathcal{Z}$-trasformate. Questo procedimento si basa sulla relazione

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\left[(z\mathbf{I} - A)^{-1} z\right]$$

Procedendo nei calcoli si ha che

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix} z}{(z+1)(z+2)}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{z+3}{(z+1)(z+2)} & \dfrac{1}{(z+1)(z+2)} \\ \dfrac{-2}{(z+1)(z+2)} & \dfrac{z}{(z+1)(z+2)} \end{bmatrix} z\right\}$$

Antitrasformando, si ottiene il risultato

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix}$$

<u>Modo III</u>. Uso del polinomio minimo annullante. Il polinomio minimo della matrice $\mathbf{A}$ coincide con il polinomio caratteristico. Ne segue che matrice la $\mathbf{A}^k$ deve potersi esprimere nel seguente modo

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=0}^{1} \gamma_i \mathbf{A}^i = \gamma_0 \mathbf{I}_2 + \gamma_1 \mathbf{A}$$

I parametri γ_0 e γ_1 si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \end{bmatrix}$$

Sostituendo nella precedente relazione si ha che

$$\mathbf{A}^k = \gamma_0 \mathbf{I}_2 + \gamma_1 \mathbf{A} = \frac{\lambda_2 \lambda_1^k - \lambda_1 \lambda_2^k}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathbf{I}_2 + \frac{\lambda_2^k - \lambda_1^k}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathbf{A}$$

Posto $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= [2(-1)^k - (-2)^k] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + [(-1)^k - (-2)^k] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$