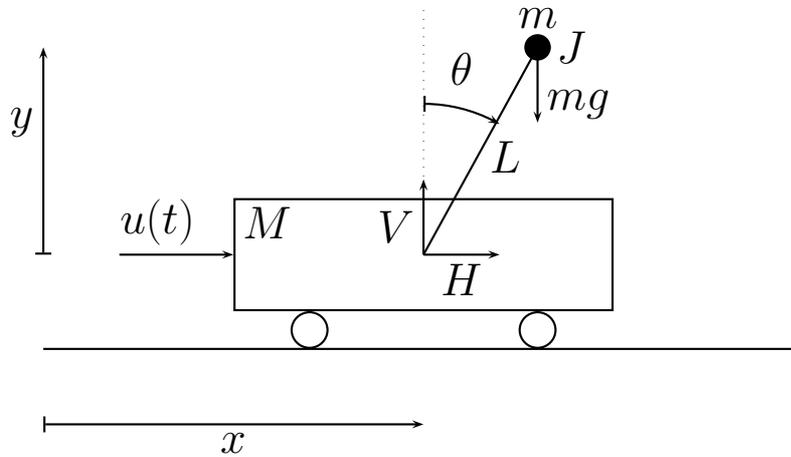


## Controllo del pendolo inverso

**Esempio.** Sia dato il seguente sistema fisico.



Calcolare una retroazione dinamica dell'uscita  $\theta$  che stabilizzi il sistema nell'intorno del punto  $\theta = 0$ .

Introdotte le variabili ausiliarie  $V$  ed  $H$  che descrivono l'interazione tra l'asta e il carrello, le equazioni dinamiche del sistema sono le seguenti:

$$\text{Asta : } \begin{cases} H(t) = m \frac{d^2}{dt^2}(x + L \sin \theta) \\ V(t) - mg = m \frac{d^2}{dt^2}(L \cos \theta) \\ J\ddot{\theta} = VL \sin \theta - HL \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{Carrello : } M\ddot{x} = u(t) - H(t)$$

Se si trascura l'azione dell'asta sul carrello,  $H(t) \simeq 0$ , l'accelerazione  $\ddot{x}$  risulta proporzionale alla forza di ingresso  $u(t)$ :

$$H(t) \simeq 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{u(t)}{M}$$

Eliminando le variabili ausiliarie  $H$  e  $V$  dal precedente sistema, si trova un'equazione differenziale che esprime l'equilibrio del movimento attorno al punto di cerniera tra asta e carrello:

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} = mgL \sin \theta - m\ddot{x}L \cos \theta$$

Esplicitando  $\ddot{\theta}$  e sostituendo  $u(t)/M$  al posto di  $\ddot{x}$  si ottiene

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{mL}{(J+mL^2)}g \sin \theta - \frac{mL}{(J+mL^2)}\frac{u}{M} \cos \theta \\ &= \alpha g \sin \theta - \frac{\alpha}{M}u \cos \theta\end{aligned}$$

dove, per brevità, si è posto

$$\alpha = \frac{mL}{(J + mL^2)}$$

Utilizzando il seguente vettore di stato:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad y = \theta = x_1$$

il sistema dato può essere descritto nello spazio degli stati nel modo seguente

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha g \sin x_1 - \frac{\alpha}{M}u \cos x_1 \end{cases}$$

Quando  $u = 0$ , i punti di equilibrio del sistema sono  $\mathbf{x} = k\pi$  con  $k \in \mathcal{Z}$ .

Linearizzando nell'intorno del punto di equilibrio  $\mathbf{x} = 0$  si ha:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{(0,0)} \mathbf{x} + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right]_{(0,0)} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g \cos x_1 + \frac{\alpha}{M}u \sin x_1 & 0 \end{bmatrix}_{(0,0)} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{M} \cos x_1 \end{bmatrix}_{(0,0)} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{M} \end{bmatrix} u = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{Cx}\end{aligned}$$

Gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  sono reali distinti:

$$\Delta_A(s) = s^2 - \alpha g = (s + \sqrt{\alpha g})(s - \sqrt{\alpha g}) \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\alpha g}$$

Retroazione statica dell'uscita. Posto:

$$u(t) = \bar{k} y = \bar{k} \mathbf{C} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{k} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

la matrice del sistema retroazionato è:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{k}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha g - \bar{k}\frac{\alpha}{M} & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è:

$$\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\bar{k}\mathbf{C}}(s) = s^2 - \left( \alpha g - \bar{k}\frac{\alpha}{M} \right)$$

Per  $\bar{k}$  grande gli autovalori sono immaginari; per  $\bar{k}$  piccolo gli autovalori sono reali ed uno dei due è a parte reale positiva. Ne segue che il sistema non è stabilizzabile mediante una retroazione statica dell'uscita.

Retroazione statica dello stato. La matrice di raggiungibilità del sistema è a rango pieno

$$\mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{M} \\ -\frac{\alpha}{M} & 0 \end{bmatrix}$$

per cui mediante una retroazione statica dello stato deve essere possibile posizionare a piacere gli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  del sistema retroazionato. Sia  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$  la matrice di retroazione. I polinomi caratteristici della matrice  $\mathbf{A}$  e della matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$  sono:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = s^2 - \alpha g, \quad \Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}}(s) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$$

La sintesi della matrice  $\mathbf{K}$  può essere fatta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_c \{ \mathcal{R}^+ (\mathcal{R}_c^+)^{-1} \}^{-1} = \mathbf{K}_c \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{M} \\ -\frac{\alpha}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha g - \lambda_1\lambda_2 & (\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{M}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\frac{M}{\alpha} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{M}{\alpha}(\alpha g + \lambda_1\lambda_2) & -\frac{M}{\alpha}(\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Osservatore asintotico di ordine pieno. La matrice di osservabilità del sistema è a rango pieno

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per cui è possibile posizionare a piacere gli autovalori  $\beta_1$  e  $\beta_2$  dell'osservatore asintotico di ordine pieno:  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} - \mathbf{Ly}$ . Sia  $\mathbf{L} = [l_1 \ l_2]^T$  la matrice dei guadagni. I polinomi caratteristici della matrice  $\mathbf{A}$  e della matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$  sono:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = s^2 - \alpha g, \quad \Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{LC}}(s) = s^2 - (\beta_1 + \beta_2)s + \beta_1\beta_2$$

La sintesi della matrice  $\mathbf{L}$  può essere fatta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \{(\mathcal{O}_c^-)^{-1}\mathcal{O}^-\}^{-1}\mathbf{L}_c = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \mathbf{L}_c \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha g - \beta_1\beta_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 \\ -\alpha g - \beta_1\beta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Osservatore asintotico di ordine ridotto. La trasformazione di coordinate  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{T}}\bar{\mathbf{x}}$  porta il sistema ad assumere la forma

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}}^{-1} \rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha g \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{M} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

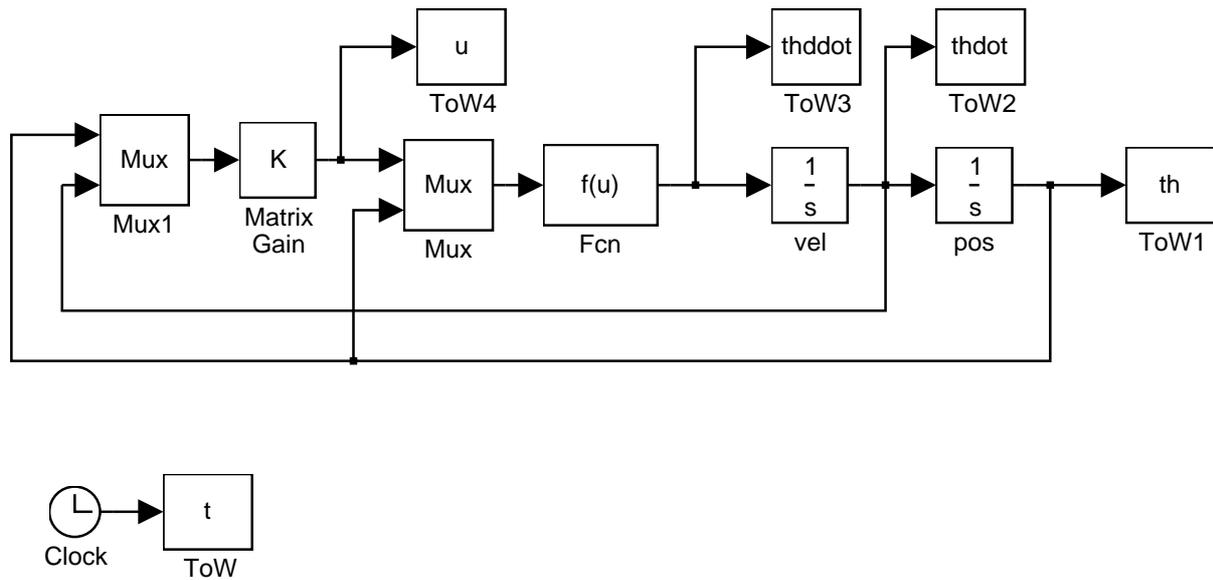
Dalla relazione  $\mathbf{A}_{11} + \mathbf{LA}_{21} = \mathbf{L} = \beta$  si ricava  $\mathbf{L} = \beta$ . L'osservatore di ordine ridotto assume quindi la forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \hat{v}(t) - \mathbf{Ly}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{v}(t) - \beta y(t) \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}}(t) &= (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{LA}_{21})\hat{v}(t) + [(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{LA}_{22}) - (\mathbf{A}_{11} + \mathbf{LA}_{21})\mathbf{L}]y(t) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{LB}_2)u(t) \\ &= \beta\hat{v}(t) + (\alpha g - \beta^2)y(t) - \frac{\alpha}{M}u(t) \end{aligned}$$

Simulazione del sistema retroazionato. In ambiente Simulink si è definito il seguente schema a blocchi (pendmdl.mdl):



I parametri che caratterizzano il sistema sono i seguenti:

$$M = 2, \quad m = 0.5, \quad L = 0.4, \quad J = 0.02$$

La funzione  $f(u)$  è definita come segue:

$$f(u) = \alpha \left[ g \sin(u(2)) - \frac{u(1)}{M} \cos(u(2)) \right]$$

La matrice  $K$  è:

$$\left[ \frac{M}{\alpha} (\alpha g + \lambda_1 \lambda_2) \quad -\frac{M}{\alpha} (\lambda_1 + \lambda_2) \right]$$

Invece di simulare direttamente in ambiente Simulink, si è preferito attivare la simulazione da Matlab. A tale scopo è stato scritto il file comandi pendolo.m:

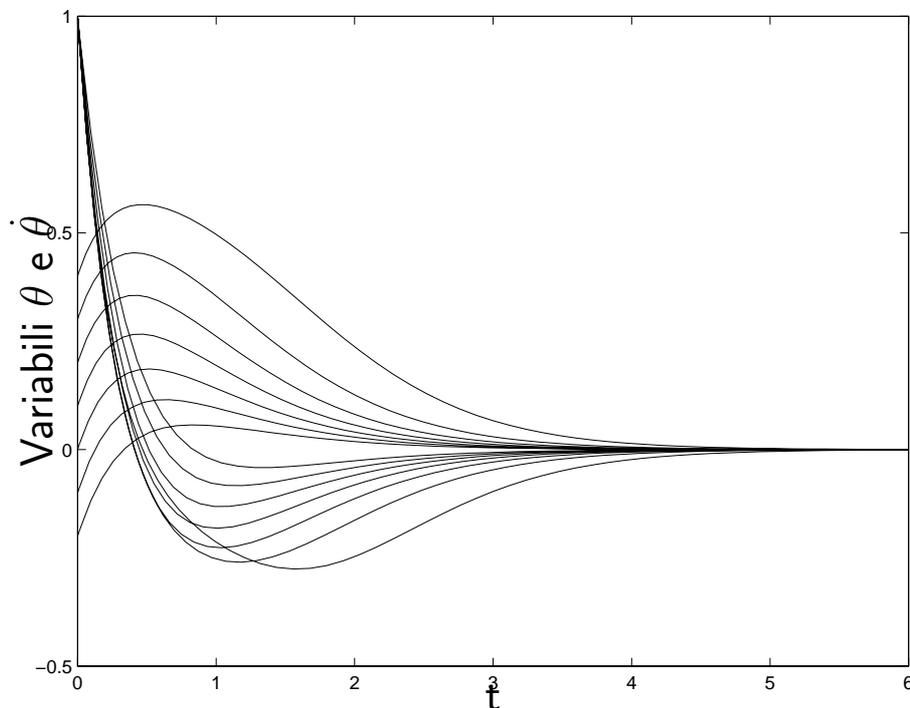
```

%%%%%%%%%% Parametri del sistema %%%%%%%%%%%
M=2;           % massa carrello
m=0.5;        % massa asta
L=0.4;        % lunghezza asta
g=9.81;       % accelerazione
J=0.02;       % momento di inerzia
%%%%%%%%%% Simulazione e graficazione %%%%%%%%%%%
tfin=6;        % istante finale
th00=1;       % condizione iniziale di posizione
thdot0=th00;  % condizione iniziale di velocita'
lam1=-2+0*j;  % autovalore di progetto
lam2=conj(lam1); % autovalore complesso coniugato
alpha=m*L/(J+m*L^2); % variabile ausiliaria
K=M*[alpha*g+lam1*lam2 -(lam1+lam2)]/alpha; % matrice dei guadagni
p=4;
figure(1); clf % attiva una nuova figura
figure(2); clf
for th0=[-th00:th00/10:th00]; % ciclo al variare della condizione iniziale
    sim('pendmdl',tfin); % si simula lo schema a blocchi 'pendmdl'
    if (th0>=-0.2)&(th0<=0.4)
        figure(1)
        plot(t,th); hold on % graficazione della posizione
        plot(t,thdot) % graficazione della velocita'
    end
    figure(2)
    plot(th,thdot); hold on % graficazione nel piano delle fasi
    plot(-th,-thdot)
    freccia(th(p),thdot(p),th(p+1),thdot(p+1),th00/30,thdot0/20)
    freccia(-th(p),-thdot(p),-th(p+1),-thdot(p+1),th00/30,thdot0/20)
    % freccia() e' una funzione creata ad hoc
end
figure(1)
axis([0 tfin -0.5*max(th00,thdot0) max(th00,thdot0)])
xlabel('time')
ylabel('th thdot')
title('traj')
figure(2)
if imag(lam1)==0
    plot([-1 1], lam1*[-1 1],':')
end
axis([-th00 th00 -thdot0 thdot0])
xlabel('th')
ylabel('thdot')
title('phase')

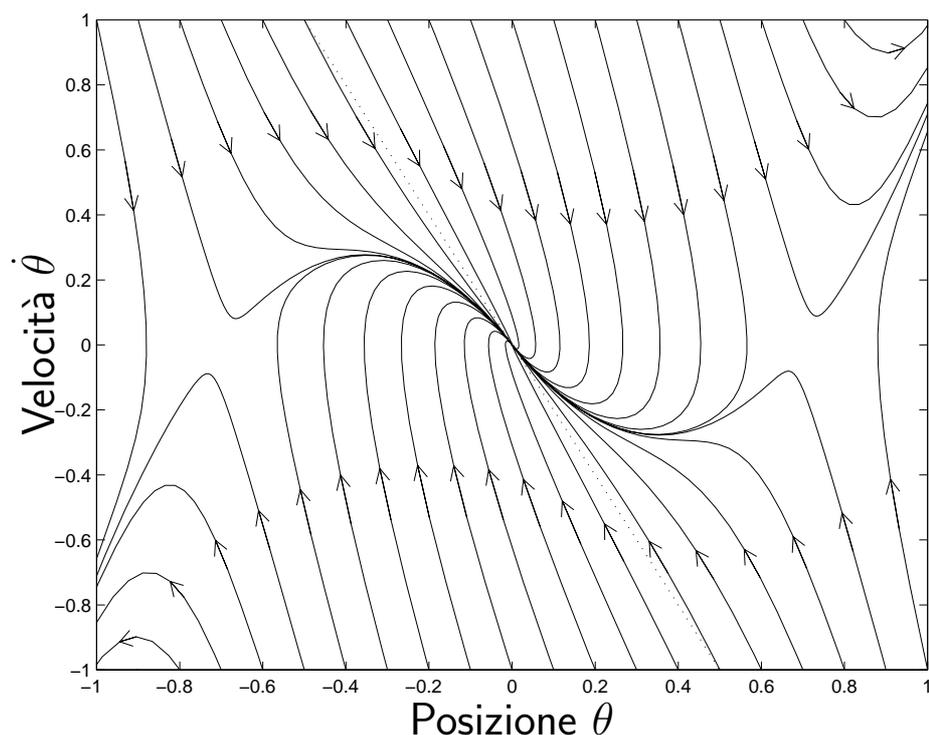
```

## Retroazione statica dello stato: poli reali coincidenti

Nel caso di autovalori reali  $\lambda_{1,2} = -2$  gli andamenti delle variabili  $\theta(t)$  e  $\dot{\theta}(t)$  sono di tipo aperiodico:

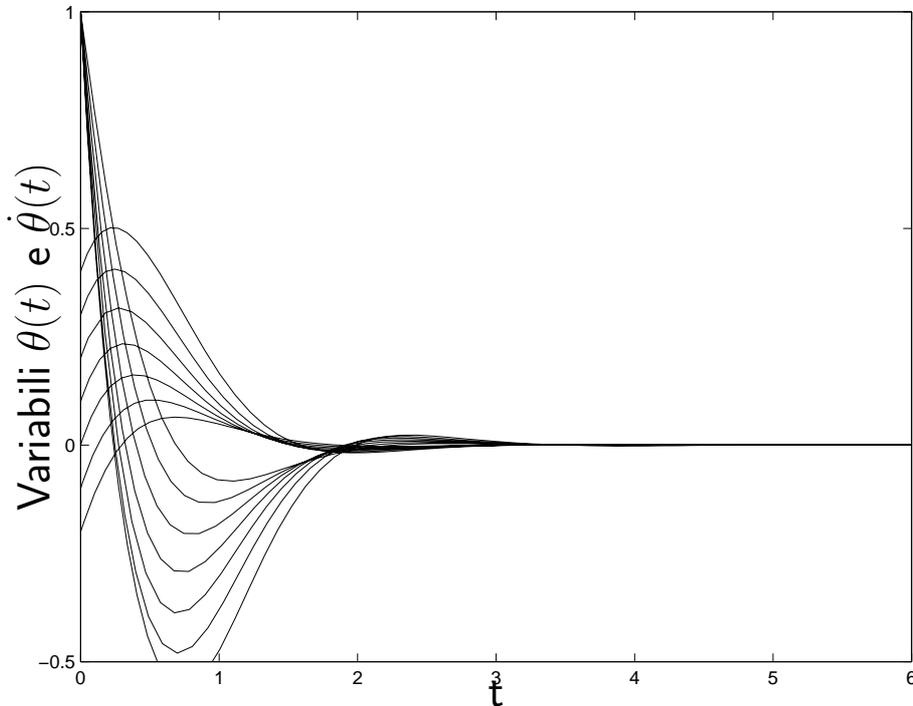


Le traiettorie nello spazio delle fasi (nodo stabile) tendono a zero appiattendosi lungo l'unico autovettore del sistema (linea tratteggiata):

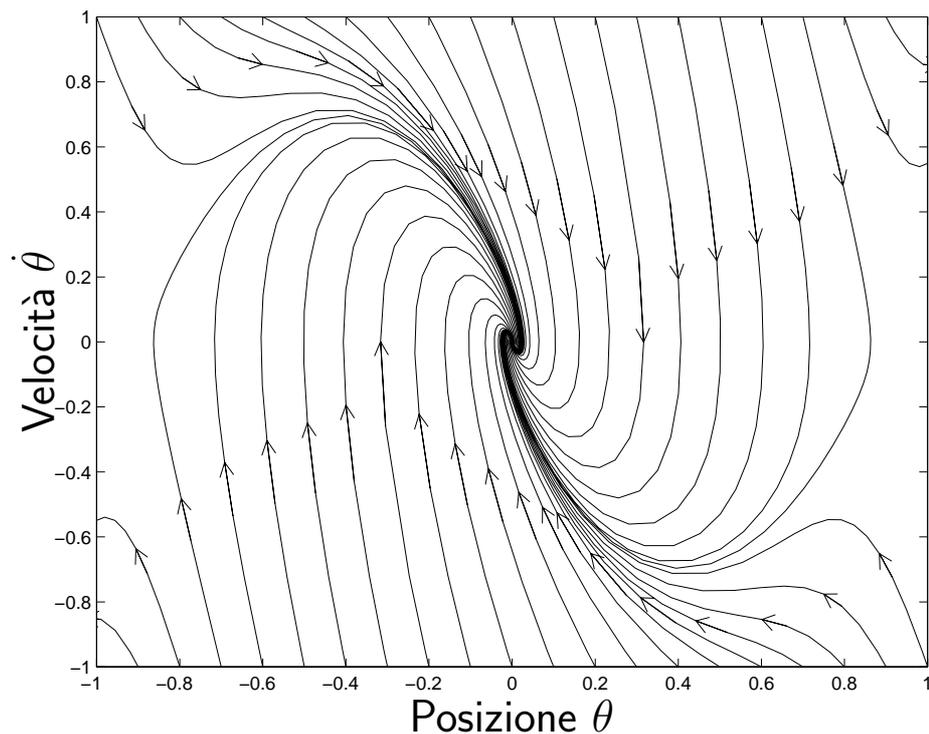


## Retroazione statica dello stato: poli complessi coniugati

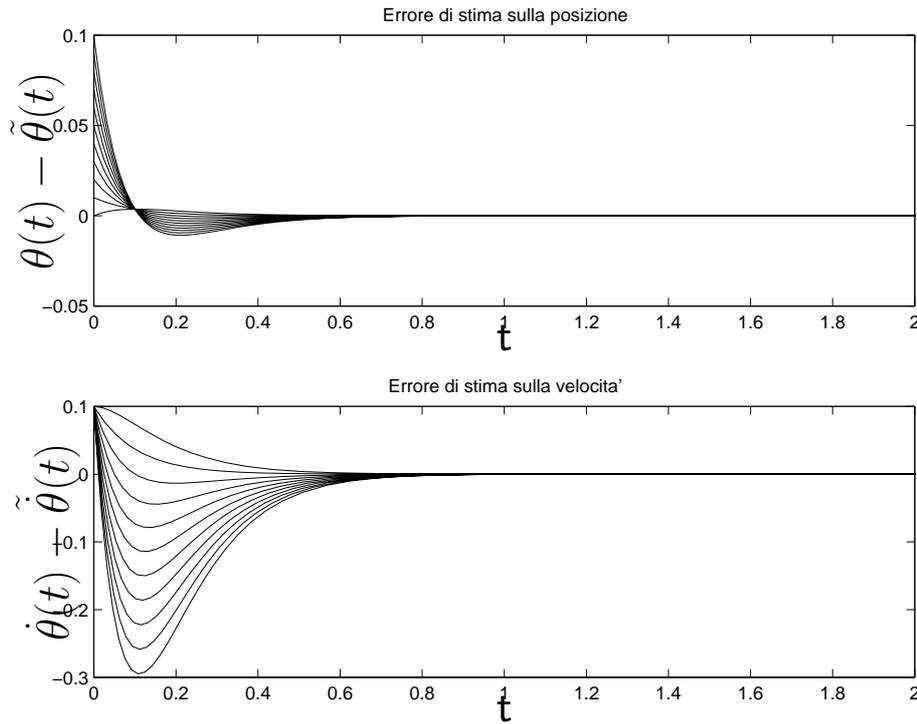
Nel caso di autovalori complessi coniugati  $\lambda_{1,2} = -2 \pm 2j$ , gli andamenti delle variabili  $\theta(t)$  e  $\dot{\theta}(t)$  sono di tipo oscillatorio smorzato:



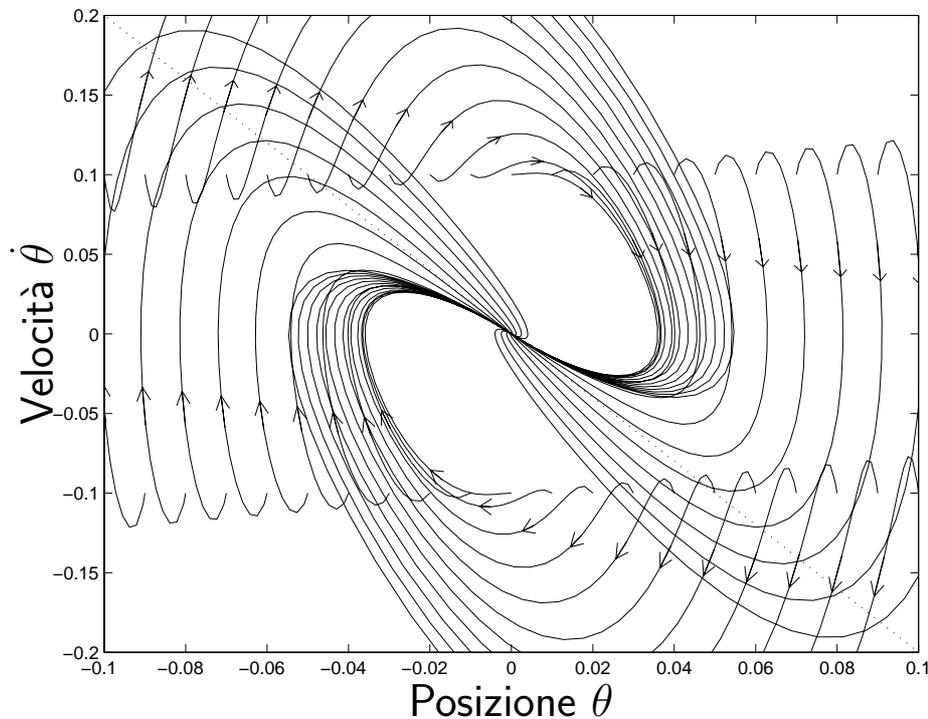
Gli andamenti delle traiettorie nello spazio delle fasi (fuoco stabile) tendono all'origine con andamento a "spirale":



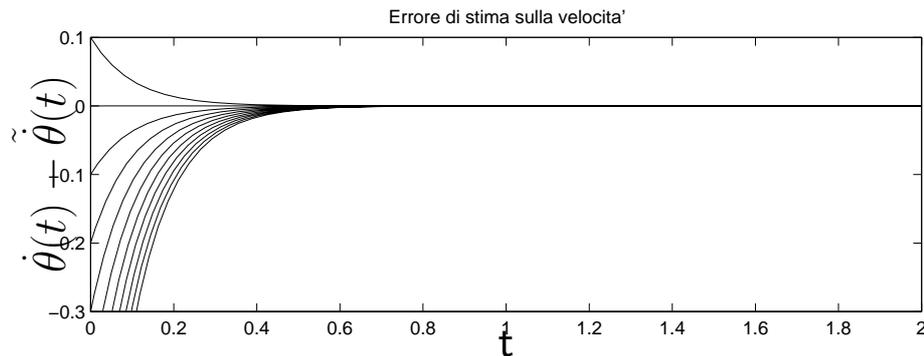
Utilizzando l'osservatore asintotico di ordine pieno,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = -10$ , si ottengono i seguenti andamenti temporali degli errori di stima:



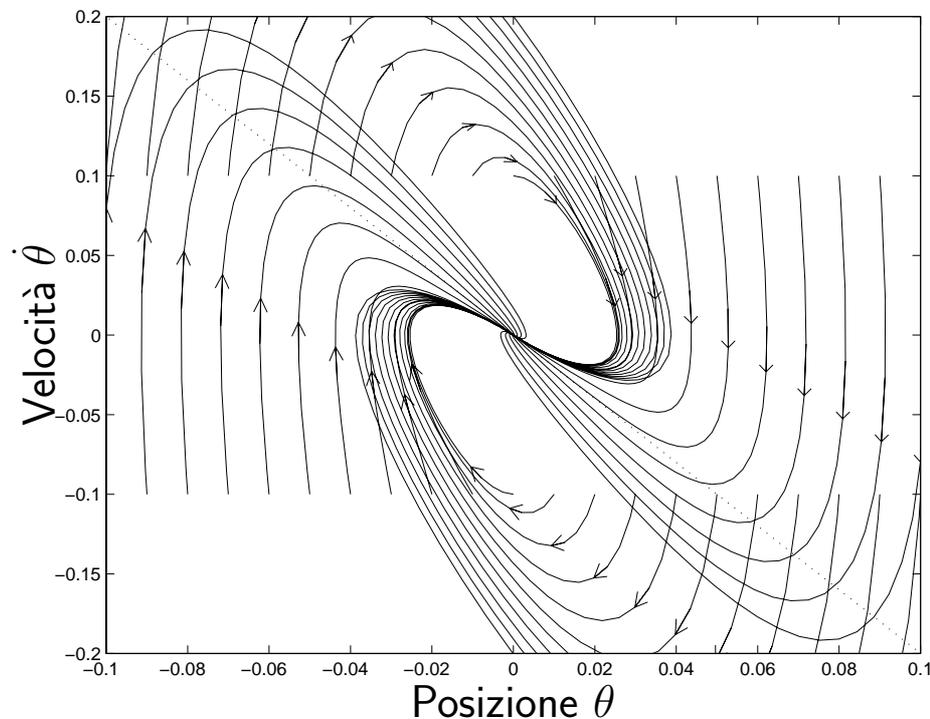
e le seguenti traiettorie nello spazio delle fasi:



Utilizzando l'osservatore asintotico di ordine ridotto,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$ ,  $\beta = -10$ , si ottengono i seguenti andamenti temporali degli errori di stima:



e le seguenti traiettorie nello spazio delle fasi:



Rispetto al caso precedente si ha una più rapida convergenza a zero dell'errore di stima della velocità.

Nel caso non lineare l'utilizzo dell'osservatore di stato tipicamente riduce l'ampiezza della regione di asintotica convergenza a zero.