Analisi della Stabilità: stabilità del movimento.

- Un sistema viene detto <u>stabile</u> se manifesta un *comportamento* insensibile nei confronti di particolari *perturbazioni* esterne.

- La definizione di stabilità secondo Lyapunov fa riferimento:

  1) ad un particolare movimento $(t,\ \bar{x}(t))$:

  $$\bar{x}(t) = \psi(t, t_0, \bar{x}(t_0), \bar{u}(\cdot))$$

  univocamente determinato dall'istante iniziale t_0, dallo stato iniziale $\bar{x}(t_0)$ e dalla funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$.

  2) alla sola variazione dello stato iniziale $\bar{x}(t_0)$.

- Il movimento perturbato $(t,\ x(t))$ che si ottiene a partire dall'istante iniziale t_0, dallo stato perturbato $x(t_0)$ e dalla funzione di ingresso $\bar{u}(\cdot)$ verrà indicato con:

$$x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), \bar{u}(\cdot))$$

<u>*Definizione*</u> [Lyapunov]: Un movimento $(t,\ \bar{x}(t))$ è <u>***stabile***</u> se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta(\epsilon,\ t_0) > 0$ tale che per tutti gli $x(t_0)$ che soddisfano la relazione:

$$||x(t_0) - \bar{x}(t_0)|| < \delta(\epsilon,\ t_0)$$

si ha

$$||x(t) - \bar{x}(t)|| \leq \epsilon$$

per $t \geq t_0$.

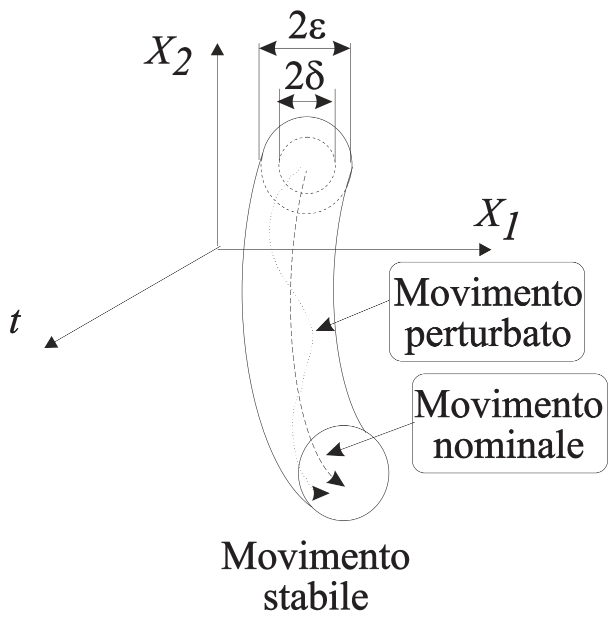
<u>*Definizione.*</u> Un movimento $(t,\ \bar{x}(t))$ è <u>***asintoticamente***</u> stabile se, oltre ad essere stabile, soddisfa anche la relazione

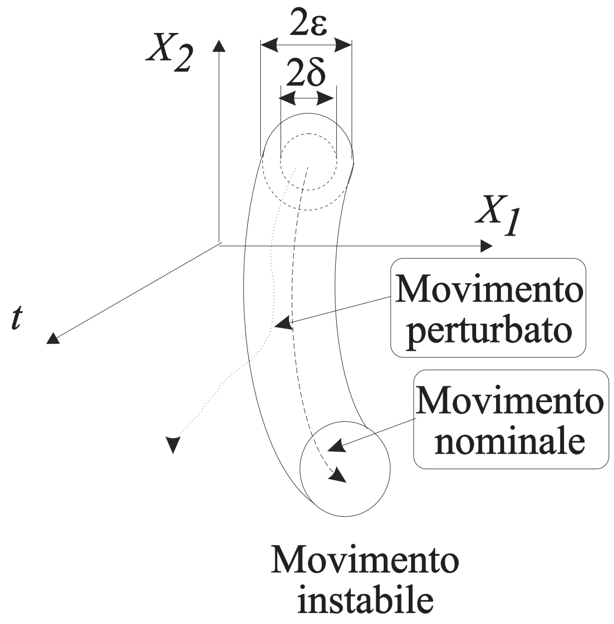
$$\lim_{t\to\infty} ||x(t) - \bar{x}(t)|| = 0$$

<u>*Definizione.*</u> Un movimento $(t,\ \bar{x}(t))$ è <u>***uniformemente***</u> stabile se, oltre ad essere stabile, il parametro δ non è funzione dell'istante iniziale t_0: $\delta = \delta(\epsilon)$.

<u>*Definizione.*</u> Un movimento $(t,\ \bar{x}(t))$ è <u>***instabile***</u> se non è stabile.

Stabilità : interpretazione geometrica.





In riferimento alla definizione di stabilità, occorre tenere presente che:

- L'esame della stabilità è legato al particolare movimento $\bar{x}(t)$ considerato, cioè alla particolare condizione iniziale $(t_0,\, \bar{x}(t_0))$ e al particolare segnale di ingresso $\bar{u}(\cdot)$ considerato. Al variare di queste condizioni, uno stesso sistema può risultare stabile od instabile.

- *La definizione di stabilità è locale*, poichè non vengono posti limite alla scelta di δ (che può essere preso piccolo a piacere).

- La definizione di stabilità richiede l'esame completo (per tutti i $t \geq t_0$) di tutti i movimenti perturbati $x(t)$ che si ottengono a partire da un intorno dello stato iniziale $\bar{x}(t_0)$.

- Per sistemi *tempo-invarianti*, se un movimento è stabile, allora è anche uniformemente stabile.

- La definizione di stabilità del movimento, si applica anche al caso in cui il movimento di riferimento sia uno *stato di equilibrio*: $\bar{x}(t) = \bar{x}$.

L'equilibrio dei sistemi regolari.

- Consideriamo il problema di determinare la *stabilità* degli stati di *equilibrio* di un sistema *regolare* invariante e a dimensioni finite.

- Se consideriamo il solo problema della determinazione di stati di equilibrio, non si perde in generalità considerando solo funzioni di ingresso costanti $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$.

  Infatti, per un sistema regolare *tempo invariante* e a dimensioni *finite* tutti gli stati di equilibrio sono ottenibili per mezzo di ingressi costanti. Questa proprietà viene ovviamente a cadere nel caso di sistemi *tempo varianti*.

  Esempio. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-variante:

$$\dot{x}(t) = -a\,x(t) + (2 + \cos t)u(t)$$

  Se si utilizza il seguente segnale di ingresso

$$u(t) = \frac{b}{(2 + \cos t)}$$

  il sistema raggiunge il seguente stato di equilibrio

$$x(t) = \frac{b}{a}$$

L'equilibrio dei sistemi regolari continui.

Si consideri l'equazione di stato di un sistema continuo tempo-invariante:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Lo stato $\mathbf{x}_e$ è uno *stato di equilibrio* relativo all'ingresso costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ per il sistema se $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$, cioè se:

$$\boxed{\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_0) = 0}$$

Definiamo per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ la funzione:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \stackrel{\triangle}{=} \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0)$$

L'evoluzione del *sistema autonomo* (privo di ingresso):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

a partire da qualsiasi stato iniziale $\mathbf{x}(t_0)$ coincide con quello del sistema originario sollecitato dall'ingresso costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ a partire dallo stesso stato iniziale.
In particolare $\mathbf{x}_e$ è stato di equilibrio per il sistema autonomo se e solo se è stato di equilibrio per il sistema originale.

L'equilibrio dei sistemi regolari discreti.

Si consideri l'equazione di stato di un sistema discreto invariante:

$$\mathbf{x}(k+1) = \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

Lo stato $\mathbf{x}_e$ è uno *stato di equilibrio* relativo all'ingresso costante $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_0$ per il sistema se $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$, cioè se:

$$\boxed{\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_e}$$

Definiamo per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ la funzione:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) \stackrel{\triangle}{=} \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_0)$$

L'evoluzione del *sistema autonomo* (privo di ingresso)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$$

a partire da qualsiasi stato iniziale $\mathbf{x}_0$ coincide con quello del sistema originario sollecitato dall'ingresso costante $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_0$ a partire dallo stesso stato iniziale. In particolare $\mathbf{x}_e$ è stato di equilibrio per il sistema autonomo se e solo se è stato di equilibrio per il sistema originale.

Significato pratico di stabilità.

- La *definizione di stabilità* secondo Lyapunov si riferisce a movimenti dovuti a perturbazioni sullo stato iniziale.
- La perturbazione è dovuta in generale a cause *minori*, dette anche *disturbi*, agenti sul sistema. Questi disturbi possono aver luogo a causa di:
  - Errori nella *modellazione* del sistema da controllare.
  - Applicazione di un *carico* al sistema.
  - *Rumore* elettromagnetico nella misura dello stato del sistema e nella attuazione dell'azione di controllo.

  Queste cause non si limitano ad agire sullo stato iniziale, ma perdurano durante l'evoluzione temporale del sistema.
- Una importante proprietà afferma che se un sistema è *asintoticamente stabile* nel senso di Lyapunov, allora è *stabile* anche in presenza di perturbazioni persistenti.

Stabilità dell'uscita.

La definizione di stabilità di Lyapunov riguarda il movimento del sistema, cioè la funzione che definisce la transizione dello stato al variare del tempo. In realtà la variabile di interesse è l'uscita, esiste tuttavia una proprietà che lega i due fatti:

- *Proprietà* : Sia dato il sistema invariante:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

  Se la trasformazione di uscita $\mathbf{g}$ è *uniformemente continua*, l'asintotica stabilità di un movimento $\psi(t, t_0, \overline{\mathbf{x}}(t_0), \overline{\mathbf{u}}(\cdot))$ implica l'asintotica stabilità del corrispondente movimento di uscita $\mathbf{g}(\psi(t, t_0, \overline{\mathbf{x}}(t_0), \overline{\mathbf{u}}(\cdot)), \overline{\mathbf{u}}(t))$.

Criteri di stabilità.

- *Primo metodo di Lyapunov* : Si esegue una analisi diretta delle soluzioni delle equazioni differenziali di stato.
- *Secondo metodo di Lyapunov* (metodo diretto): L'analisi di stabilità avviene impiegando, oltre alle equazioni di stato, delle opportune funzioni scalari definite sullo spazio degli stati, dette *funzioni di Lyapunov*.

Il metodo più praticabile, e che quindi verrà analizzato in dettaglio, è il secondo. Per motivi di semplicità considereremo come stato di equilibrio l'origine, alla quale è sempre possibile riportarsi con una trasformazione degli assi coordinati.

Funzione semidefinita (definita) positiva*:*

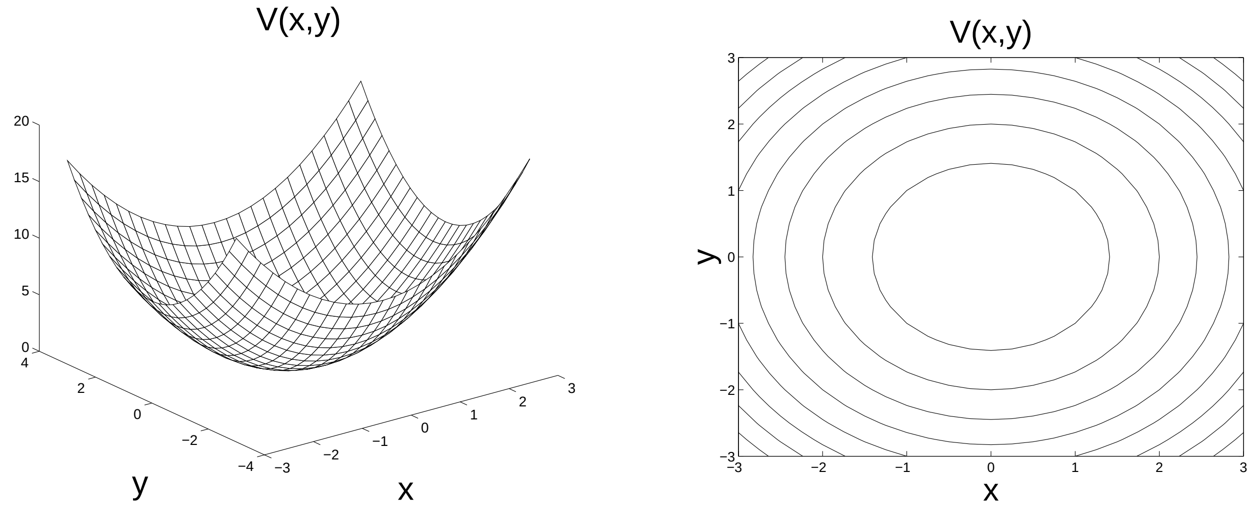
- *Definizione* : Sia $W \subseteq X = \mathcal{R}^n$ un intorno aperto dell'origine. Una funzione continua:

$$V(\mathbf{x}) =: W \rightarrow \mathcal{R}$$

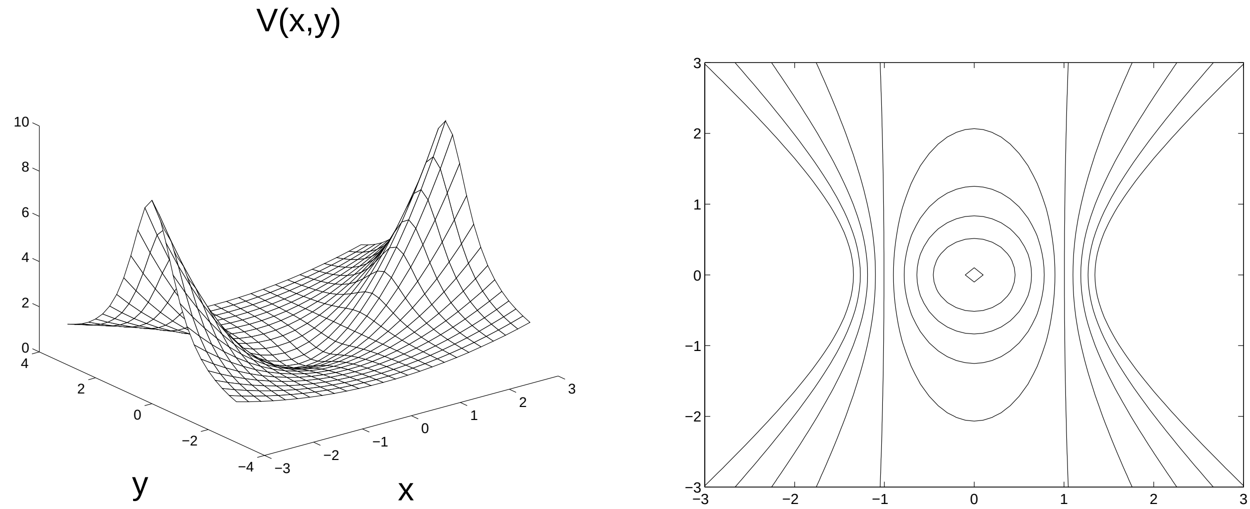
  è *semidefinita positiva* (s.d.p.) se è nulla nell'origine e se esiste un intorno dell'origine in cui $V(\mathbf{x})$ assume valori non negativi.

- *Definizione* : Una funzione $V(\mathbf{x})$ definita come sopra si dice *definita positiva* se è semidefinita positiva e si annulla solo nell'origine.
- La funzione $V(x)$ ha il significato di "funzione energia".

Funzioni definite positive.

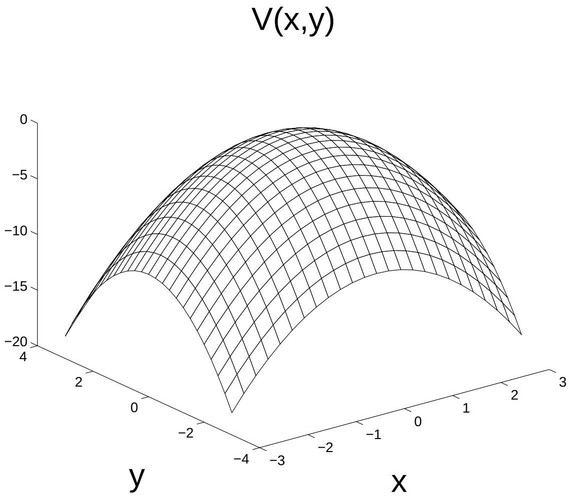


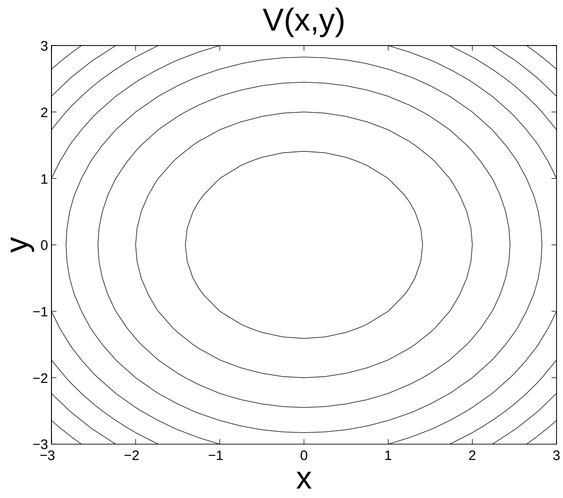
$$V(x, y) = x^2 + y^2$$



$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + y^2)}$$

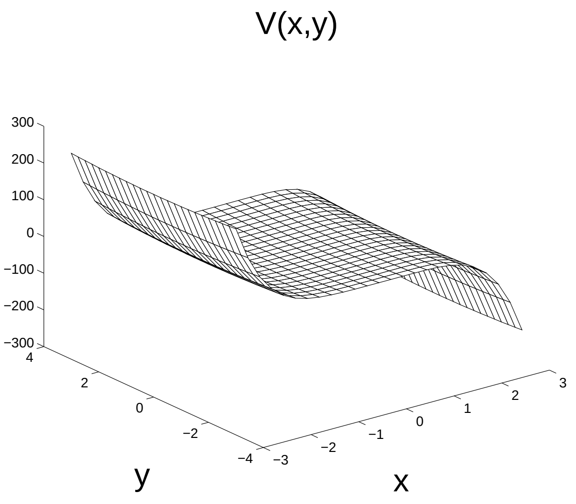
Funzione definita negativa

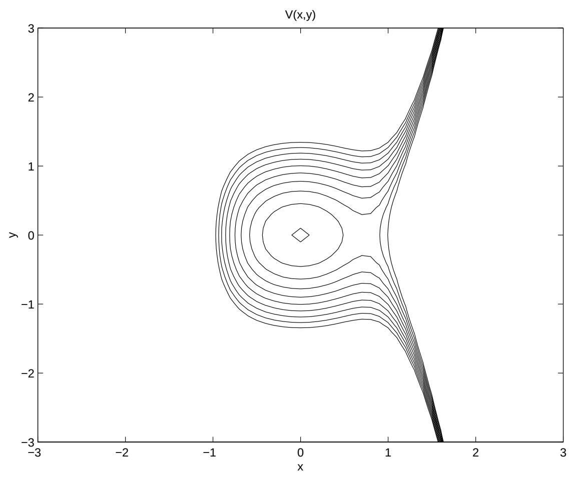




$$V(x,y) = -(x^2 + y^2)$$

Funzione definita positiva





$$V(x,y) = x^2 + y^2 - x^5$$

Esempio di funzione <u>semidefinita</u> positiva:

$$V(x,y) = x^2 - x^5 \geq= 0$$

Forme quadratiche.

Sia $\mathbf{P} \in \mathcal{R}^{n\times n}$ una matrice *simmetrica* e (semi)definita positiva. La forma quadratica:

$$V(\mathbf{x}) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = \sum_{i,j} P_{i,j}x_ix_j$$

è per definizione una funzione (semi)definita positiva.

- Una matrice simmetrica $\mathbf{P}$ *è definita positiva se e solo se sono positivi tutti i minori principali*, cioè i determinanti delle seguenti sottomatrici dalla matrice $\mathbf{P}$:

$$p_{1,1} > 0, \quad \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix} > 0 \;\; \cdots, \qquad \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{bmatrix} > 0$$

- Solo la parte simmetrica $\mathbf{A}_s$ di una generica matrice $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_w$$

  influenza la corrispondente forma quadratica.

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}_s\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{x}^T\mathbf{A}_w\mathbf{x}}_{0} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}_s\mathbf{x}$$

  Infatti, una proprietà delle matrici emisimmetriche $\mathbf{A}_w$ è che il vettore $\mathbf{A}_w\mathbf{x}$ è sempre perpendicolare al vettore $\mathbf{x}$.

- Siano λ_i gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_s$. *La forma quadratica*

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}_s\mathbf{x}$$

  è definita positiva se e solo se *tutti gli autovalori λ_i sono positivi; è semi-definita positiva* se e solo se *tutti gli autovalori λ_i sono positivi o nulli.*

$$V(\mathbf{x}) > 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \lambda_i > 0 \qquad\qquad V(\mathbf{x}) \geq 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \lambda_i \geq 0$$

Derivata della funzione $V(\mathbf{x}(t))$

Si consideri il sistema continuo ed autonomo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \qquad (*)$$

e sia $W \subseteq X$ un intorno aperto dell'origine, sul quale è definita una funzione $V(\mathbf{x})$ scalare continua e con derivate prime continue:

$$V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$$

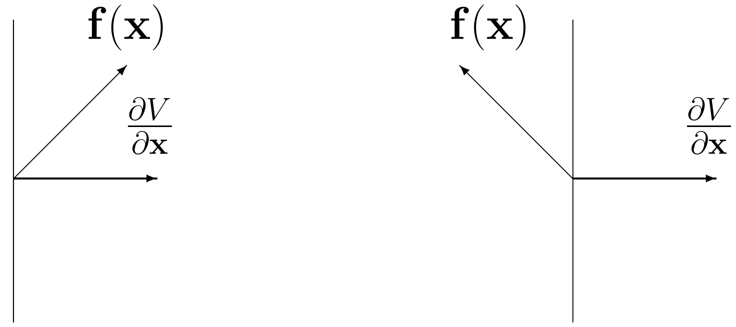
Consideriamo la seguente funzione a valori vettoriali:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] = grad(V)$$

che ha il significato geometrico di direzione in $\mathcal{R}^n$ lungo la quale la funzione $V(\mathbf{x})$ aumenta con maggiore rapidità.
Se il movimento $\mathbf{x}(t)$ è una soluzione della funzione di stato $(*)$, allora la funzione $V(\mathbf{x}(t))$ ha derivata:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Tale prodotto può essere visto come il prodotto interno tra due vettori $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, e quindi interpretato in modo geometrico:



$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) > 0$ $\qquad\qquad$ $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$

Nota : Il calcolo di $\dot{V}(\mathbf{x}(t))$ non richiede la determinazione del movimento, e quindi non richiede di integrare la funzione di stato.

Criterio di stabilità di Lyapunov - Sis. cont.

Sia $\mathbf{x} = 0$ uno stato di equilibrio per il sistema *continuo* descritto dalla funzione di stato:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \qquad (*)$$

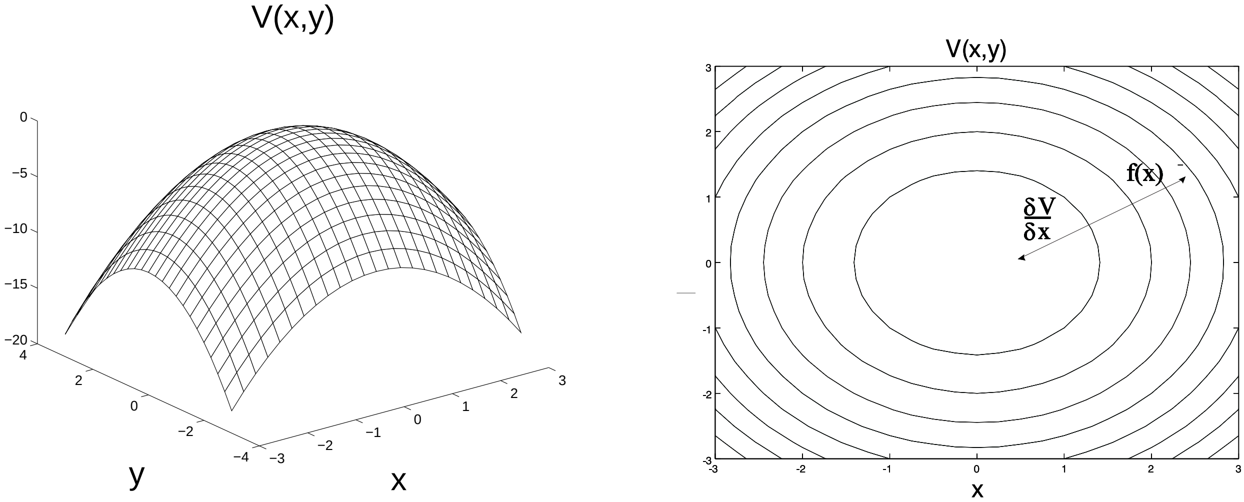
Se in un intorno W dell'origine esiste una funzione $V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$ definita positiva *con derivate prime continue e se $\dot{V}(\mathbf{x})$ è* semidefinita negativa, *allora l'origine è* stabile. Se inoltre $\dot{V}(\mathbf{x})$ è *definita* negativa, allora l'origine è *asintoticamente* stabile.

Definizione. Una funzione $V(\mathbf{x})$ che soddisfa le precedenti ipotesi è detta *funzione di Lyapunov* per il sistema.

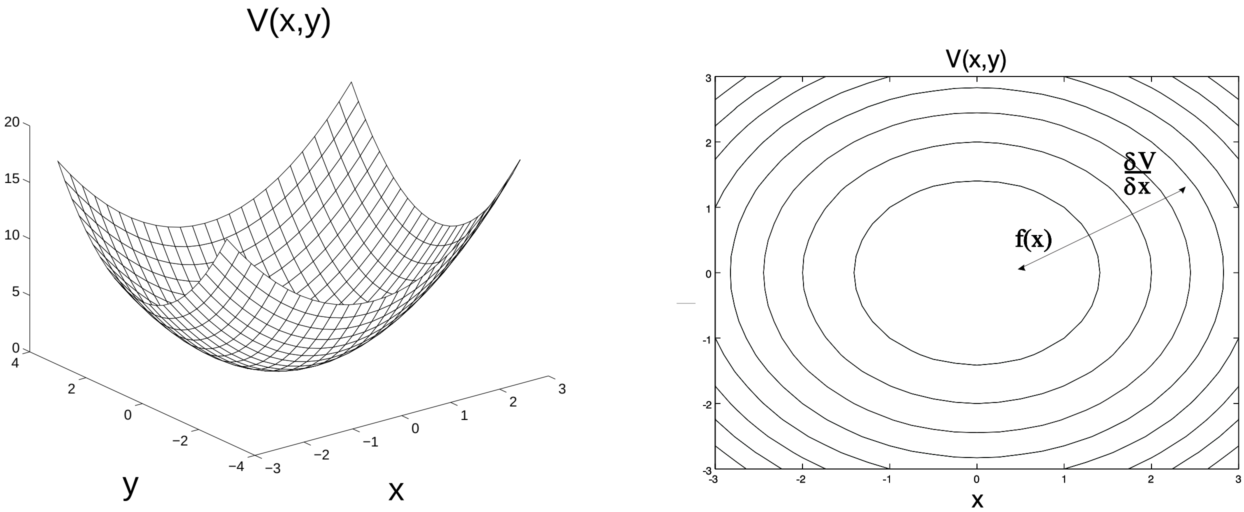
Il criterio di Lyapunov può quindi essere espresso anche nella seguente forma contratta: *se per il sistema $(*)$ esiste una funzione di Lyapunov definita in un intorno $\mathcal{W}$ dell'origine, allora il sistema è stabile.*

Criterio di Lyapunov: esempi.

Consideriamo due casi in cui si ha $\dot{V}(x(t)) < 0$:



Sistema instabile



Sistema stabile

- La condizione $\dot{V} < 0$ da sola non garantisce la stabilità, occorre anche che la funzione V sia definita positiva: $V > 0$

Criterio di stabilità di La Salle-Krasowskii

Il criterio di stabilità di *La Salle* costituisce un raffinamento del criterio di Lyapunov: esso infatti consente di verificare la stabilità asintotica dell'equilibrio anche nei casi in cui il criterio di Lyapunov può garantire soltanto la stabilità semplice.

- *Proprietà* : Sia $\mathbf{x} = 0$ uno stato di equilibrio per il sistema descritto dalla funzione di stato:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

  Si supponga che:

  – in un intorno W dell'origine esista una funzione $V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$ *definita positiva* con derivate prime continue.

  – la funzione $\dot{V}$ sia *semidefinita negativa*.

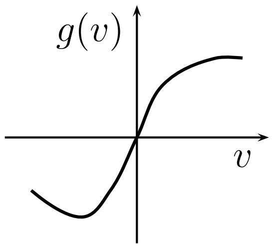
  – Se l'insieme $\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in W | \dot{V} = 0\}$ *non contiene traiettorie perturbate*, allora:

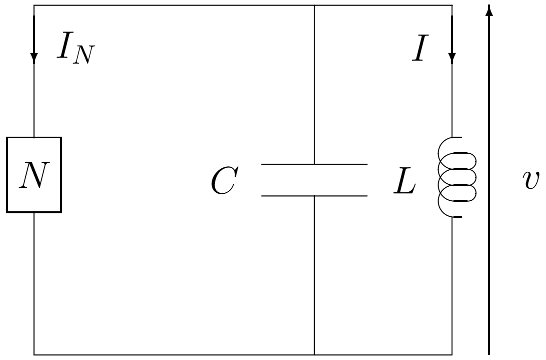
$$\Downarrow$$

  – $\mathbf{x} = 0$ è un punto di equilibrio *asintoticamente* stabile.

Esempio. Consideriamo il circuito elettrico mostrato nella figura, in cui è presente un elemento non lineare N con una caratteristica corrente–tensione $I_N = g(v)$, in cui $g(v)$ è una funzione statica tale per cui $vg(v) > 0$. Consideriamo il vettore di stato: $\mathbf{x} = [I,\ v]^T$. La funzione di transizione dello stato è:

$$\begin{cases} \dot{I} = \dfrac{v}{L} \\[2ex] \dot{v} = -\dfrac{g(v)}{C} - \dfrac{I}{C} \end{cases}$$





L'origine è punto di equilibrio. Per studiarne la stabilità consideriamo la funzione definita positiva:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}Cv^2$$

che rappresenta l'energia totale accumulata nel condensatore e nell'induttanza del circuito elettrico. Poichè la funzione

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = LI\,\underbrace{\frac{v}{L}}_{\dot{I}} + Cv\,\underbrace{\left(-\frac{g(v)}{C} - \frac{I}{C}\right)}_{\dot{v}} = -v\,g(v) \leq 0$$

è semidefinita negativa, l'equilibrio è sicuramente *almeno stabile*. Il luogo dei punti in cui si annulla la funzione $\dot{V}(\mathbf{x})$ è l'insieme:

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad\qquad I \in \mathcal{R}$$

Un movimento ha traiettoria totalmente contenuta in $\mathcal{N}$ se e solo se in ogni istante è $v(t) = 0$. Introducendo questa condizione nella seconda delle relazioni di stato, si ottiene:

$$0 = -\frac{I}{C} \qquad \rightarrow \qquad I = 0$$

Ma allora la traiettoria si riduce all'origine, e pertanto, non esistono in $\mathcal{N}$ traiettorie perturbate. Applicando il criterio di La Salle, si conclude che l'origine è asintoticamente stabile.

Nota: La chiave della stabilità del sistema risiede nel fatto che l'elemento non lineare ha una relazione tra tensione e corrente di tipo *dissipativo*, cioè tale elemento dissipa l'energia presente nel circuito.

Se esiste una traiettoria del sistema contenuta in $\mathcal{N}$, allora il sistema è semplicemente stabile.

Criterio di instabilità di Lyapunov

Criterio di instabilità di Lyapunov. Sia $\mathbf{x} = 0$ un punto di equilibrio per il seguente sistema autonomo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

e sia W un intorno dell'origine nel quale sia definita una funzione $V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$ continua con derivate prime continue e nulla nell'origine. Se

1) l'origine è punto di accumulazione per l'insieme dei punti in cui è $V(\mathbf{x}) > 0$;

2) $\dot{V}$ è definita positiva in W;

allora il punto di equilibrio $\mathbf{x} = 0$ è instabile.

Esempio. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_2 + x_1 x_2 \end{cases}$$

ha $\mathbf{x} = 0$ come punto di equilibrio. Si consideri la seguente funzione

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

che assume valori positivi nel quarto di piano

$$W^+ = \{(x_1,\ x_2) \mid x_1 > x_2,\ x_1 > -x_2\}$$

L'origine è chiaramente un punto di accumulazione per l'insieme W^+. La funzione

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1^2(1 - x_2) + 2x_2^2(1 - x_1) > 0$$

è definita positiva in W^+. Ne segue che per il criterio di instabilità di Lyapunov, il punto di equilibrio $\mathbf{x} = 0$ è instabile.

Funzione di Lyapunov per sistemi discreti

Sia $\mathbf{x} = 0$ uno stato di equilibrio per il sistema autonomo discreto descritto dalla seguente funzione di stato:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) \qquad (*)$$

Sia $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione continua definita in un opportuno intorno W dell'origine, e sia $\Delta V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione continua così definita:

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k))$$

Utilizzando l'equazione alle differenze $(*)$ si ottiene:

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))) - V(\mathbf{x}(k))$$

Essa rappresenta l'incremento della funzione $V(\mathbf{x})$ in un passo lungo la soluzione dell'equazione $(*)$, cioè lungo le traiettorie del sistema.

Esempio:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \dfrac{x_2(k)}{1+x_2^2(k)} \\ x_2(k+1) = \dfrac{x_1(k)}{1+x_2^2(k)} \end{cases} \qquad \begin{cases} V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \\ \Delta V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}) &= \frac{x_2^2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{x_1^2}{(1+x_2^2)^2} - x_1^2 - x_2^2 \\ &= \frac{-(2+x_2^2)x_2^2}{(1+x_2^2)^2}(x_1^2+x_2^2) \leq 0 \end{aligned}$$

La funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa, per cui il sistema è semplicemente stabile.

Condizioni di stabilità per i sistemi discreti

- Proprietà [Criterio di stabilità di Lyapunov] : Sia $\mathbf{x} = 0$ uno stato di equilibrio per il sistema sopra descritto. Se in un intorno W dell'origine esiste una funzione continua $V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$ *definita positiva* e se ΔV è *semidefinita negativa* allora l'origine è *stabile*. Se inoltre ΔV è *definita negativa*, allora l'origine è *asintoticamente stabile*.

- Proprietà [Criterio di stabilità di La Salle] : Sia $\mathbf{x} = 0$ uno stato di equilibrio per il sistema sopra descritto. Si supponga che in un intorno W dell'origine esista una funzione continua $V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$ *definita positiva* e che ΔV sia *semidefinita negativa*. Se l'insieme $\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in W | \Delta V = 0\}$ non contiene traiettorie perturbate, allora $\mathbf{x} = 0$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Stabilità dei sistemi lineari.

L'ipotesi di linearità sul sistema ci permette di formulare le seguenti affermazioni:

1. (Stabilità locale). Se *un movimento* di un sistema lineare *è stabile* (asintoticamente stabile) rispetto a perturbazioni dello stato iniziale $\mathbf{x}_0$, allora *qualunque altro movimento* del sistema *è stabile* (asintoticamente stabile) rispetto a perturbazioni dello stato iniziale.

2. (Stabilità globale). Se un movimento di un sistema lineare è stabile (asintoticamente stabile) *rispetto a piccole perturbazioni* dello stato iniziale $\mathbf{x}_0$, allora è stabile (asintoticamente stabile) *rispetto a perturbazioni* dello stato iniziale *di ampiezza qualunque* (finita).

3. L'origine di un sistema lineare autonomo è sempre un punto di equilibrio.

Criteri di stabilità per i sistemi lineari.

Proprietà. Il sistema lineare autonomo tempo-variante:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

è stabile secondo Lyapunov *se e solo se* per ogni t_0 esiste un numero reale $M > 0$ tale che sia:

$$\|\mathbf{\Phi}(t,t_0)\| \leq M < \infty \qquad \forall t \geq t_0$$

ed è asintoticamente stabile *se e solo se* è stabile secondo Lyapunov e se vale la relazione:

$$lim_{t\to\infty}\|\mathbf{\Phi}(t,t_0)\| = 0$$

Nota: Per un sistema lineare tempo invariante

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

la posizione degli autovalori della matrice $\mathbf{A}(t)$ non è indicativa della stabilità o meno del sistema.

Esempio. Si consideri il seguente sistema lineare continuo tempo-variante:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \qquad \leftrightarrow \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

La matrice $\mathbf{A}$ ha due autovalori coincidenti in $\lambda = -1$. Poichè il sistema è tempo variante, la posizione degli autovalori *non* è più indicativa della stabilità o meno del sistema. Infatti la matrice di transizione del sistema è la seguente:

$$\mathbf{\Phi}(t,0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & (e^t - e^{-t})/2 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Verifichiamo che $\mathbf{\Phi}(t,0)$ è la matrice di transizione mostrando che soddisfa la relazione

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t,t_0) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)$$

Infatti si ha che

$$\begin{bmatrix} -e^{-t} & (e^t + e^{-t})/2 \\ 0 & -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & (e^t - e^{-t})/2 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Un elemento della matrice $\mathbf{\Phi}(t,0)$ diverge per $t \to \infty$, per cui il sistema è sicuramente instabile.

Stabilità dei sistemi lineari stazionari.

Nei sistemi lineari stazionari continui, la *matrice di transizione* $e^{\mathbf{A}t}$, ($\mathbf{A}^k$ per i sistemi discreti) è costituita dai modi del sistema, per cui è possibile enunciare le seguenti:

- *Proprietà*. Il sistema autonomo di dimensione n, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ è:
  1. asintoticamente stabile se e solo se gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno tutti parte reale negativa.
  2. stabile (semplicemente) se e solo se gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno parte reale negativa o nulla, e gli autovalori puramente immaginari sono radici semplici del polinomio minimo associato alla matrice $\mathbf{A}$.

- *Proprietà*. Il sistema autonomo di dimensione n, $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$ è:
  1. asintoticamente stabile se e solo se gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno tutti modulo minore di uno.
  2. stabile (semplicemente) se e solo se gli autovalori di $\mathbf{A}$ hanno modulo minore o uguale ad uno, e gli autovalori a modulo uguale a uno sono radici semplici del polinomio minimo associato alla matrice $\mathbf{A}$.

Riassumendo. L'analisi di stabilità per un sistema lineare stazionario continuo o discreto, descritto dalla matrice $\mathbf{A}$, segue i passi:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Analisi degli autovalori } \lambda_0\\ \Downarrow\\ \text{Convergenza dei modi}\\ \Downarrow\\ \text{Stabilità o instabilità.}\end{array}}$$

Linearizzazione di sistemi non lineari.

- Esistono strumenti molto potenti per l'analisi dei sistemi lineari.
- Sotto opportune ipotesi è possibile, nell'intorno di un punto di *equilibrio*, considerare equivalenti il comportamento dinamico di un sistema non lineare e quello di un "particolare" sistema lineare.
- Il procedimento di *linearizzazione* ci consente di determinare l'equivalente lineare di un sistema non lineare.

Consideriamo il sistema non lineare autonomo e regolare, descritto dalla relazione:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

supponiamo che punto $\mathbf{x}_e$ sia un punto di equilibrio per tale sistema. Allora applicando la formula di Mac Laurin per la funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ otteniamo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_e(t))}_{0} + \mathbf{A}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e(t)] + h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)$$

dove la matrice costante $\mathbf{A}$ è la matrice jacobiana di $\mathbf{f}$ rispetto a $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A} \triangleq \left[\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = \begin{bmatrix} \dfrac{df_1}{dx_1} & \dots & \dfrac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{df_n}{dx_1} & \dots & \dfrac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$$

e $h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\mathbf{x} - \mathbf{x}_e$:

$$lim_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_e\| \to 0} \frac{\|h(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|} = 0$$

Criterio ridotto di Lyapunov (continuo)

Criterio ridotto di Lyapunov per sistemi continui. Sia dato il sistema non lineare tempo continuo autonomo:

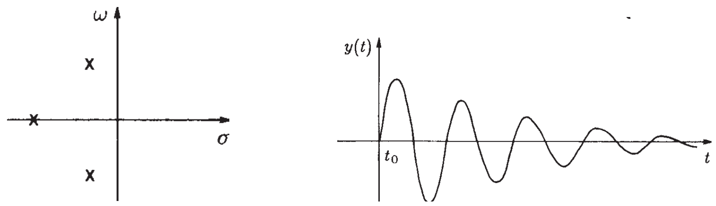
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

e sia l'origine un punto di equilibrio per il sistema. Sia

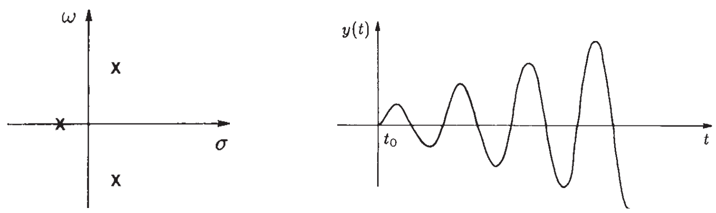
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

il sistema ottenuto per linearizzazione nell'intorno dell'origine. Allora:

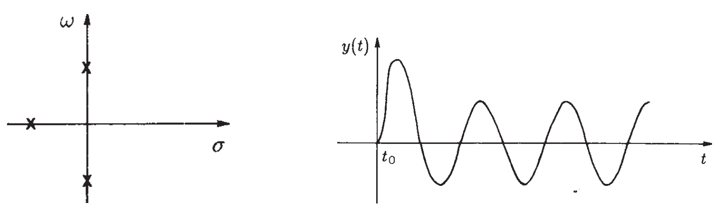
- Se gli autovalori della matrice jacobiana $\mathbf{A}$ del sistema considerato hanno parte reale negativa, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.



- Se almeno uno degli autovalori ha parte reale positiva, allora l'origine è un punto di equilibrio instabile per il sistema.



- Se gli autovalori hanno parte reale negativa e qualcuno si trova sull'asse immaginario, allora il carattere di stabilità del sistema non lineare non è correlato con il sistema linearizzato (il criterio non può essere usato).



Esempio. Consideriamo i seguenti tre sistemi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 + x_2^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 \end{cases}$$

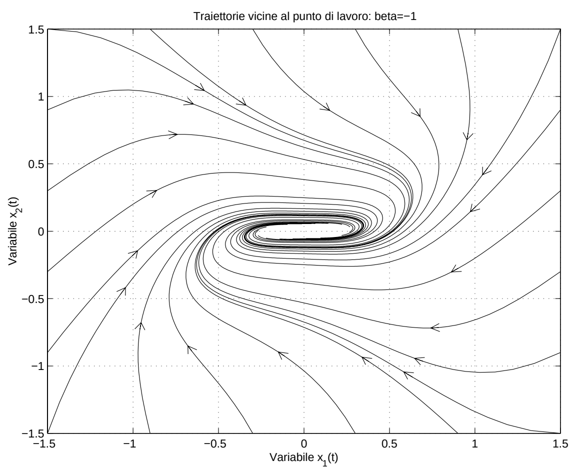
e la seguente funzione di Lyapunov

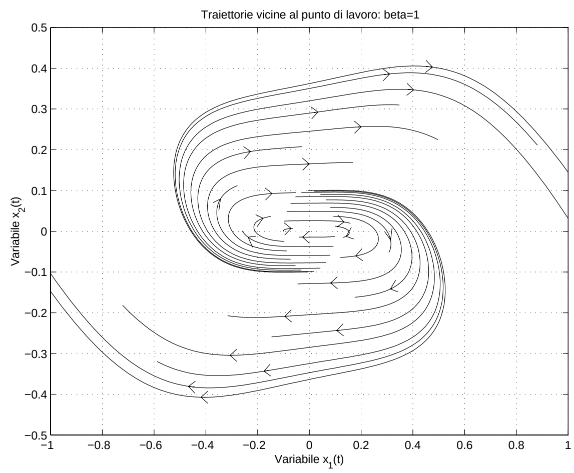
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^2$$

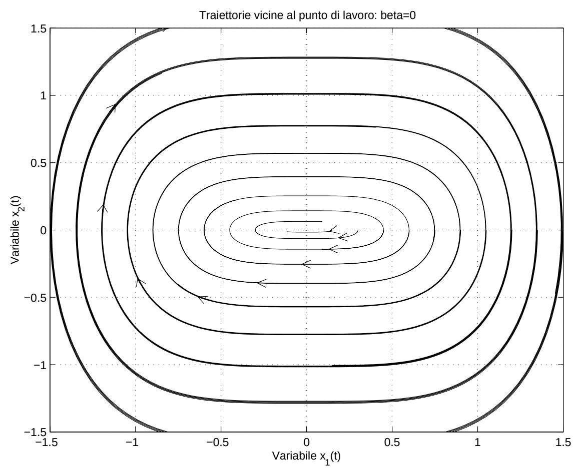
Le corrispondenti funzioni $\dot{V}$ sono:

$$\dot{V} = -4x_1^6 - 4x_2^4 < 0, \qquad \dot{V} = 4x_1^6 + 4x_2^4 > 0, \qquad \dot{V} = 0$$

Andamenti delle traiettorie in prossimità dell'origine nei tre diversi casi:







Criterio ridotto di Lyapunov - (discreto)

Criterio ridotto di Lyapunov per sistemi discreti. Sia dato il sistema non lineare autonomo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$$

e sia l'origine un punto di equilibrio per il sistema. Sia

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$$

il sistema ottenuto per linearizzazione nell'intorno dell'origine.

- Se gli autovalori della matrice jacobiana $\mathbf{A}$ del sistema considerato hanno modulo inferiore ad uno, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.
- Se almeno uno degli autovalori ha modulo maggiore ad uno, allora l'origine è un punto di equilibrio instabile per il sistema.
- Se gli autovalori hanno modulo minore di uno e qualcuno ha modulo uguale ad uno, allora il carattere di stabilità del sistema non lineare non è correlato con il sistema linearizzato (il criterio non può essere usato).

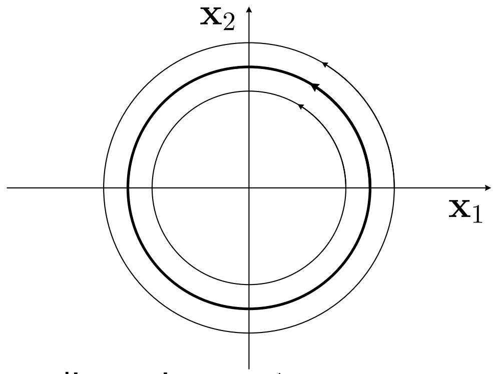
La prova è analoga al caso continuo.

Esempio. Si consideri il seguente sistema autonomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'evoluzione libera a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}_0$ è la seguente

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$



La traiettoria nello spazio degli stati è una circonferenza di raggio $r = 1$.
Un sistema lineare può avere delle evoluzioni libere di tipo periodico. Tali traiettorie sono sempre semplicemente stabili. Nei sistemi lineari non può mai accadere di avere una traiettoria chiusa asintoticamente stabile. Una eventualità di questo tipo si può avere solamente nel caso di sistemi non lineari.

Si consideri per esempio il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - r^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - r^2) \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Si può facilmente verificare per sostituzione che $r = 1$ è una soluzione periodica (ciclo limite) del sistema dato. Per verificare se $r = 1$ è un ciclo limite "stabile" o "instabile", si può procedere ad un cambiamento di coordinate. Passando per esempio a coordinate polari

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{cases}$$

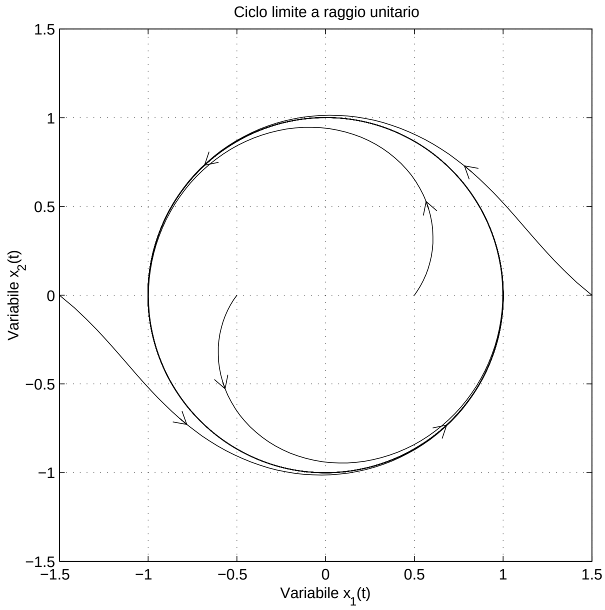
il sistema dato si trasforma come segue

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = -r\sin\theta + r\cos\theta(1 - r^2) \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = r\cos\theta + r\sin\theta(1 - r^2) \end{cases}$$

Combinando opportunamente le due equazioni si ottiene il seguente sistema equivalente a variabili separate:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} r(t) = \frac{e^t r_0}{\sqrt{1+(e^{2t}-1)r_0^2}} \\ \theta(t) = t + \theta_0 \end{cases}$$

L'andamento qualitativo delle traiettorie nel piano $(x_1,\ x_2)$ è il seguente



Il ciclo limite $r = 1$ è quindi globalmente stabile, cioè tutte le traiettorie del sistema (eccetto la traiettoria $r = 0$) tendono asintoticamente a questo ciclo limite, indipendentemente dalla condizione iniziale. Un modo alternativo per dimostrare che il ciclo limite è asintoticamente stabile è quello di considerare la seguente funzione $V(r)$ definita positiva in un intorno del punto $r = 1$:

$$V(r) = \frac{1}{2}(1 - r)^2$$

La sua derivata è una funzione definita negativa nell'intorno del punto $r = 1$:

$$\dot{V}(r) = -(1 - r)\dot{r} = -r(1 - r)^2(1 + r) < 0$$

Ne segue che il ciclo limite $r = 1$ è asintoticamente stabile.

Esempio. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& \beta(2 - x_1) + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &=& x_1 - x_1^2 x_2 \end{cases}$$

1.a) Determinare, al variare del parametro reale $\beta > 0$, gli eventuali punti di equilibrio del sistema;

1.b) Studiare al variare di β la stabilità di tali punti.

<u>Soluzione</u>. 1.a) I punti di equilibrio si determinano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 &=& \beta(2 - x_1) + x_1^2 x_2 \\ 0 &=& x_1 - x_1^2 x_2 = x_1(1 - x_1 x_2) \end{cases}$$

La seconda equazione è risolta per

$$x_1 = 0 \qquad \text{e per} \qquad x_1 x_2 = 1$$

La soluzione $x_1 = 0$ non soddisfa la prima equazione. Sostituendo $x_1 x_2 = 1$ nella prima equazione si ottiene:

$$2\beta - \beta x_1 + x_1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_1 = \frac{2\beta}{\beta - 1}$$

Per $\beta \neq 1$, l'unico punto di equilibrio del sistema è:

$$\bar{x}_1 = \frac{2\beta}{\beta - 1} \qquad \bar{x}_2 = \frac{\beta - 1}{2\beta}$$

1.b) Linearizzando nell'intorno di questo punto si ottiene:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\beta + 2x_1 x_2 & x_1^2 \\ 1 - 2x_1 x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 - \beta & \dfrac{4\beta^2}{(\beta - 1)^2} \\ -1 & \dfrac{-4\beta^2}{(\beta - 1)^2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

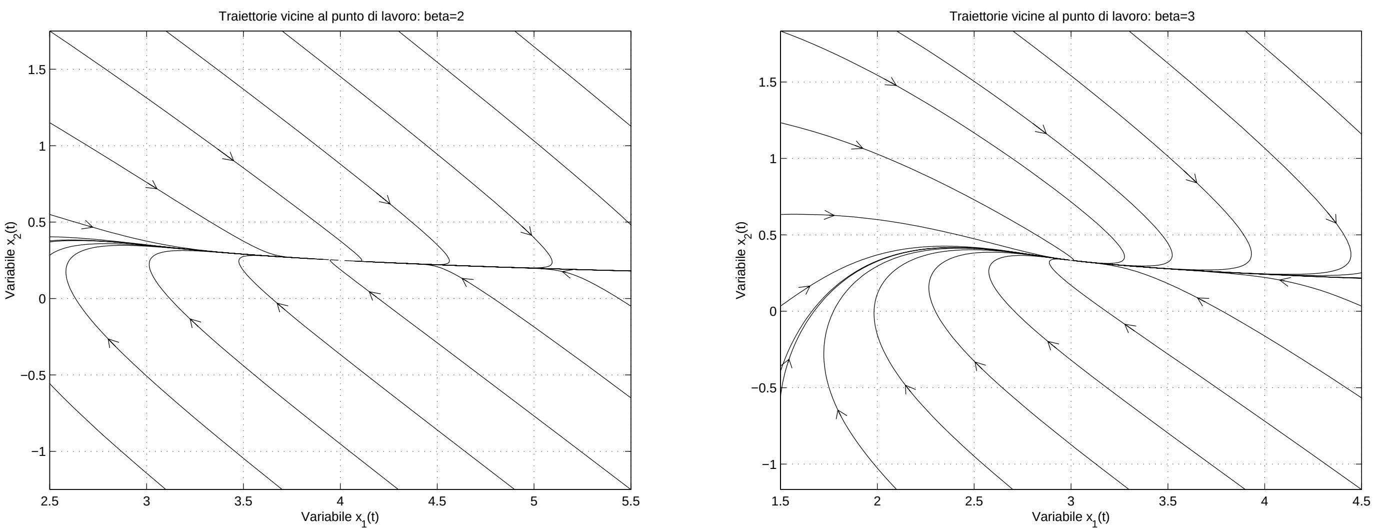
Il polinomio caratteristico del sistema è:

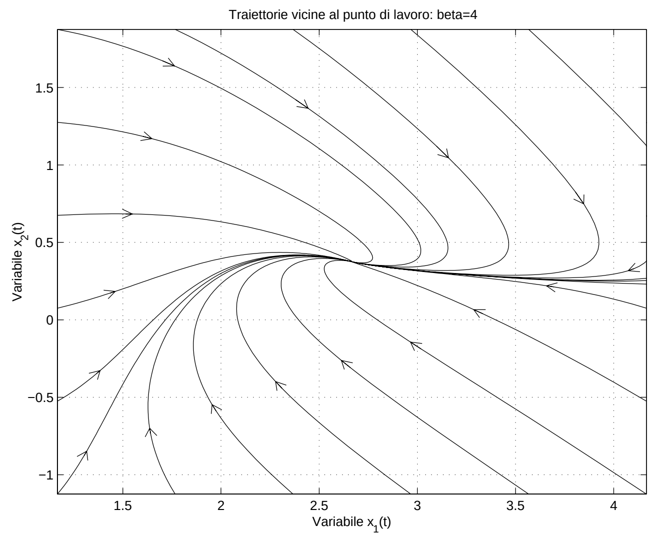
$$\Delta(s) = s^2 + \left[\beta - 2 + \frac{4\beta^2}{(\beta - 1)^2}\right] s + \frac{4\beta^2}{(\beta - 1)} = 0$$

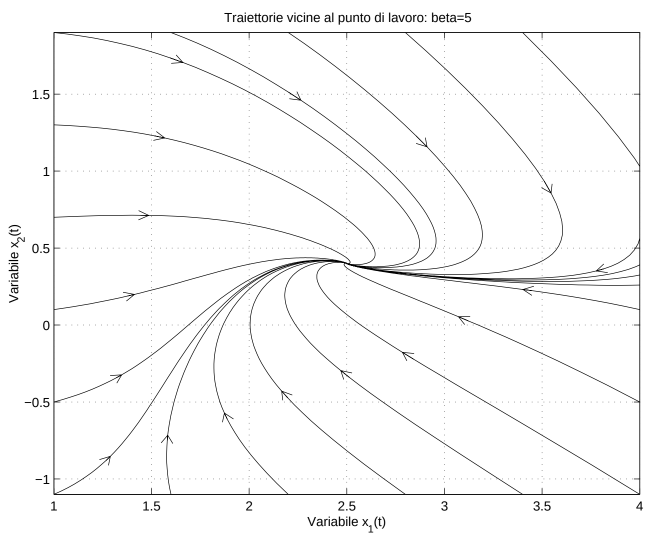
da cui si ricava

$$\Delta(s) = s^2 + \frac{\beta^3 + 5\beta - 2}{(\beta - 1)^2} s + \frac{4\beta^2}{(\beta - 1)} = 0$$

Il punto di equilibrio è stabile se i coefficienti di tale polinomio sono entrambi positivi. Ciò accade per $\beta > 1$. Per $\beta < 1$, almeno un autovalore è instabile per cui anche il punto di equilibrio è instabile. Le traiettorie del sistema per $\beta = 2$, $\beta = 3$, $\beta = 4$ e $\beta = 5$ sono le seguenti:







Le precedenti simulazioni sono state ottenute in ambiente Matlab utilizzando il seguente file di comandi "ese_x1x2.m":

```
% Sistema non lineare:       x1d=beta*(2-x1)+x1^2*x2
%                            x2d=x1-x1^2*x2
global beta
for beta=[2:5];                     % Cambiando beta cambia il punto di lavoro
   x10=2*beta/(beta-1);             % Punto di equilibrio
   x20=(beta-1)/(2*beta);
   figure(1); clf
   V=[[-1.5 1.5]+x10 [-1.5 1.5]+x20];   % Finestra di graficazione
   In_Con=inicond(V,[5,5]);             % Definizione delle condizioni iniziali
   Tspan=[0:0.005:1]*2;                 % Intervallo di simulazione
   fr=10;  dx=0.06; dy=dx;              % Posizione e ampiezza delle frecce
   for jj=[1:size(In_Con,1)]
      [t,x]=ode23('ese_x1x2_ode',Tspan,In_Con(jj,:));    % Simulazione con ODE
      plot(x(:,1),x(:,2)); hold on                          % Graficazione
      freccia(x(fr,1),x(fr,2),x(fr+1,1),x(fr+1,2),dx,dy)    % Disegno delle frecce
   end
   grid on;  axis(V)                        % Griglia e definizione degli assi
   xlabel('Variabile x_1(t)')               % Label lungo l'asse x
   ylabel('Variabile x_2(t)')               % Label lungo l'asse y
   title(['Traiettorie vicine al punto di lavoro: beta=' num2str(beta)])
   pause                                    % Pausa. Premere un tasto per proseguire
end
```

il quale, a sua volta, fa riferimento al seguente file "ese_x1x2_ode.m":

```
% function dx=ese_x1x2_ode(t,x)
%
% ODE file relativo al sistema lineare:       x1d=beta*(2-x1)+x1^2*x2
%                                             x2d=x1-x1^2*x2
function dx=ese_x1x2_ode(t,x) global beta
dx(1,1)=beta*(2-x(1))+x(1)^2*x(2); dx(2,1)=x(1)-x(1)^2*x(2);
```

La funzione "In_Cond" definisce le condizioni iniziali da cui partire. La funzione "freccia" disegna una freccia nel punto e nella direzione desiderata.

Esempio. Si consideri il seguente sistema non-lineare continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - x_2 \end{cases}$$

1.a) Calcolare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilià utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov;

1.b) Se necessario, per concludere lo studio di stabilità del punto precedente, si utilizzi la seguente funzione: $V(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \ln x_1 - \ln x_2 - 2$.

Soluzione. 1.a) I punti di equilibrio si determinano imponendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$

$$\begin{cases} 0 &= x_1 - x_1 x_2 \\ 0 &= x_1 x_2 - x_2 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} x_1(1 - x_2) &= 0 \\ x_2(x_1 - 1) &= 0 \end{cases}$$

I due possibili punti di equilibrio sono

$$(x_1,\ x_2) = (0,\ 0), \qquad\qquad (x_1,\ x_2) = (1,\ 1)$$

Lo jacobiano del sistema nel punto $(0,\ 0)$ vale

$$J_0 = \begin{bmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{bmatrix}_{(x_1,\, x_2)=(0,\, 0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lo jacobiano J_0 presenta un autovalore instabile $\lambda = 1$, per cui il punto di equilibrio $(x_1,\ x_2) = (0,\ 0)$ è sicuramente instabile. Nel punto $(1,\ 1)$, lo jacobiano del sistema vale

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 - 1 \end{bmatrix}_{(x_1,\, x_2)=(1,\, 1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo jacobiano J_1 presenta due autovalori immaginari per cui utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov non è possibile concludere niente riguardo la stabilità del punto di equilibrio $(x_1,\ x_2) = (1,\ 1)$.

1.b) Per concludere lo studio di stabilità del punto di equilibrio $(1,\ 1)$ si utilizza la funzione data

$$V(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \ln x_1 - \ln x_2 - 2$$

Nell'intorno del punto $(1,\ 1)$, tale funzione è definita positiva. Infatti

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

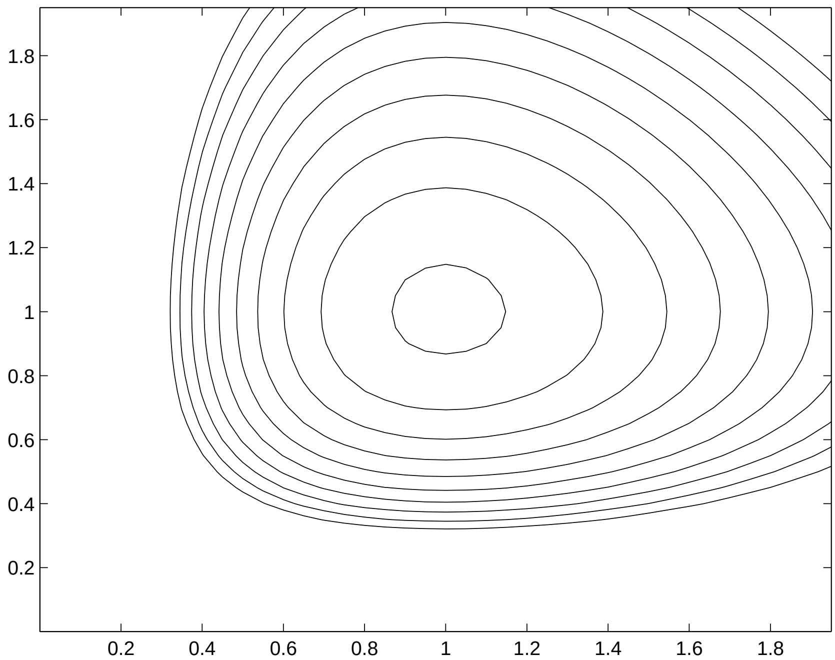
La sua derivata fatta rispetto al tempo vale

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \text{grad}V\ \dot{\mathbf{x}} = \left(1 - \frac{1}{x_1}\right)\dot{x}_1 + \left(1 - \frac{1}{x_2}\right)\dot{x}_2$$

da cui, per sostituzione, si ricava

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 - x_1 x_2 + x_1 x_2 - x_2 - (1 - x_2) - (x_1 - 1) = 0$$

Si è quindi ottenuto che $(1,\ 1)$ è un punto di equilibrio semplicemente stabile: le traiettorie si muovono lungo le curve di livello della funzione $V(x_1, x_2)$. Gli andamenti delle traiettorie nel piano $(x_1,\ x_2)$ sono i seguenti:



Esempio. Si consideri la seguente equazione differenziale non lineare:

$$\ddot{y}(t) = \cos y(t) - \frac{3}{2\pi}\, y(t) - \beta \dot{y}(t)$$

1.a) Si scrivano le equazioni di stato del corrispondente sistema dinamico e se ne determini il punto di equilibrio;

1.b) Determinare per quali valori del parametro β il sistema non lineare è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di equilibrio;

Soluzione. 1.a) Posto $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$, le equazioni di stato del sistema non lineare dato sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \cos x_1 - \frac{3}{2\pi}\, x_1 - \beta x_2 \end{cases}$$

I punti di equilibrio si determinano imponendo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$:

$$x_2 = 0, \qquad\qquad \cos x_1 = \frac{3}{2\pi}\, x_1$$

Da cui si ricava il seguente punto di equilibrio:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}, \qquad\qquad x_2 = 0$$

1.b) Linearizzando nell'intorno del punto di equilibrio si ottiene:

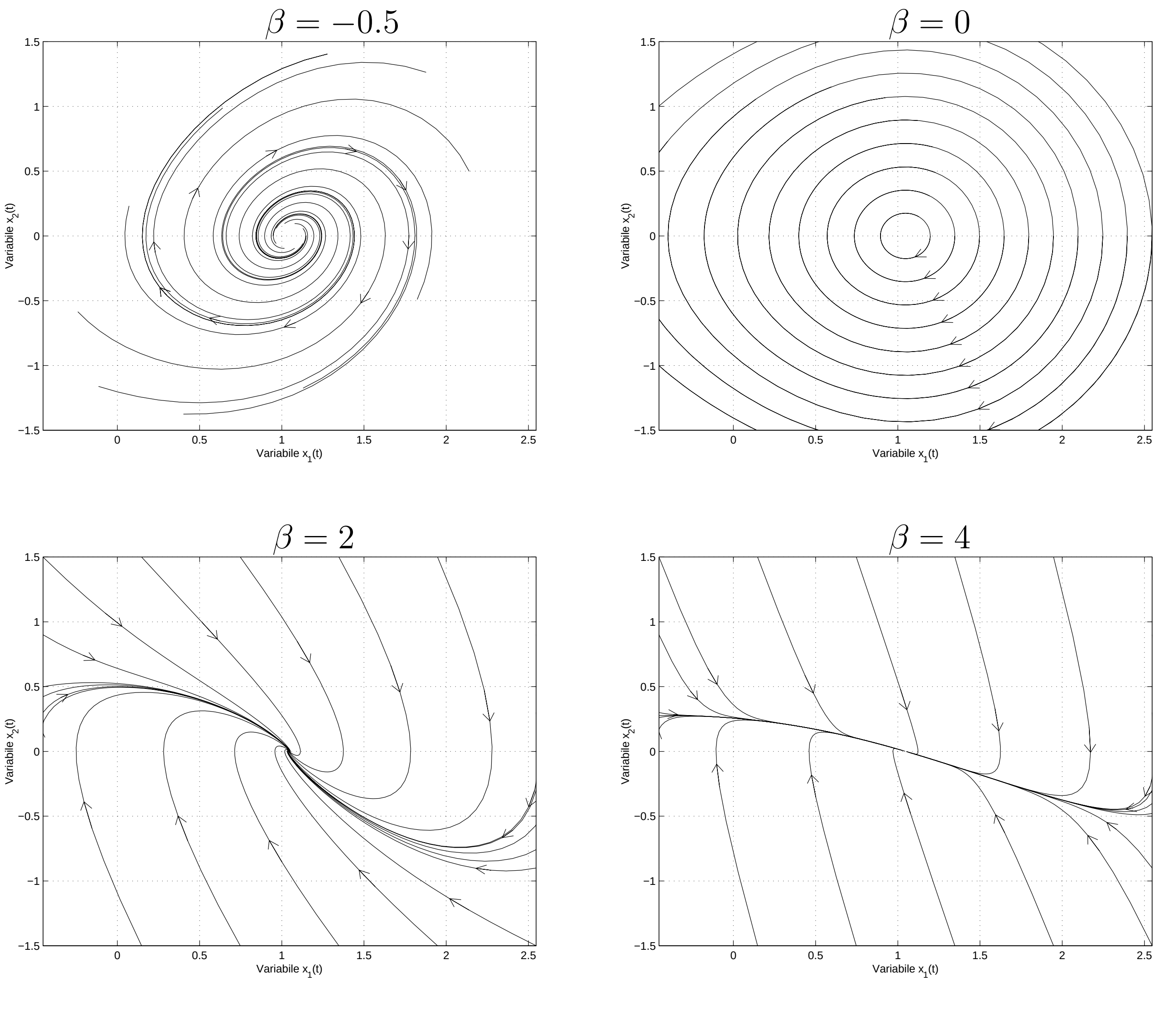
$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\sin x_1 - \frac{3}{2\pi} & -\beta \end{array} \right]_{x_1=\frac{\pi}{3}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2\pi} & -\beta \end{array} \right]$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è

$$s^2 + \beta\, s + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2\pi} = 0$$

Chiaramente, il sistema è asintoticamente stabile nell'intorno del punto di equilibrio se $\beta > 0$, mentre è instabile se $\beta < 0$. Per $\beta = 0$ il criterio ridotto di Lyapunov non si può utilizzare in quanto per tale valore di β la matrice $\mathbf{J}$ ha due autovalori complessi coniugati a parte reale nulla.

Le traiettorie del sistema per $\beta = -0.5$, $\beta = 0$, $\beta = 2$ e $\beta = 4$ sono le seguenti:



Esempio. Si consideri il seguente sistema non lineare tempo-discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= \alpha x_1(k) - x_1^3(k) \\ x_2(k+1) &= -x_2^3(k) - x_1^3(k) \end{cases}$$

1.a) Utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine al variare del parametro α;

1.b) Si ripeta lo studio della stabilità nell'origine utilizzando la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

<u>Soluzione</u>. 1.a) Linearizzando nell'intorno dell'origine si ottiene:

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cc} \alpha - 3x_1^2 & 0 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{array} \right]_{(0,0)} = \left[\begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{J}$ è

$$z(z-\alpha) = 0 \qquad \rightarrow \qquad z_1 = 0, \;\; z_2 = \alpha$$

Chiaramente, il sistema dato è asintoticamente stabile nell'origine se $|\alpha| < 1$, mentre è instabile se $|\alpha| > 1$. Nel caso $|\alpha| = 1$ il criterio ridotto di Lyapunov non può essere utilizzato in quanto uno dei due autovalori si trova sul cerchio unitario.

1.b) La funzione

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

è definita positiva nell'intorno dell'origine per cui è una possibile funzione di Lyapunov. Il calcolo di $\Delta V(x_1, x_2)$ quando $\alpha = 1$ è il seguente:

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}) &= V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \\ &= x_1^2(1-x_1^2)^2 + (-x_2^3 - x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1^4 + x_1^6 + x_2^6 + 2x_1^3 x_2^3 + x_1^6 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= -x_1^4[2 - 2x_1^2] - x_2^2[1 - x_2^4 - 2x_2 x_1^3] < 0 \end{aligned}$$

La funzione ottenuta è definita negativa in un opportuno intorno dell'origine per cui, nel caso $\alpha = 1$, il sistema non lineare dato è asintoticamente stabile nell'origine.
Nel caso $\alpha = -1$, anche la funzione data non permette di giungere ad un risultato conclusivo. Si noti che, in questo caso, la prima equazione del sistema diventa

$$x_1(k+1) = -x_1(k) - x_1^3(k)$$

ed è indipendente dalla variabile x_2. Si consideri ora la funzione $V(x_1) = x_1^2$ e si calcoli la $\Delta V(x_1)$:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1) &= (-x_1 - x_1^3)^2 - x_1^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1^4 + x_1^6 - x_1^2 = 2x_1^4 + x_1^6 > 0 \end{aligned}$$

La funzione $\Delta V(x_1)$ ottenuta è definita positiva per cui si può concludere che nel caso $\alpha = -1$, il sistema non lineare dato è instabile nell'origine.

Esempio. Dato il seguente sistema non–lineare discreto:

$$y(k+1) = -(r-2)y(k) - r\,y^2(k)$$

1.a) Calcolare, al variare del parametro $r > 0$, i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov.

1.b) Per $r = 3$, dimostrare che l'origine è un punto di lavoro asintoticamente stabile utilizzando la funzione di Lyapunov $V(y) = y^2 + \alpha y^3$ e scegliendo opportunamente il parametro α. Per $r = 1$, dimostrare che l'origine è un punto di lavoro instabile utilizzando la funzione $V(y) = -y$.

Soluzione. 1.a) I punti di equilibrio del sistema si ottengono imponendo $y(k+1) = y(k)$:

$$y(k) = -y(k)[r - 2 + r\,y(k)]$$

I punti di equilibrio del sistema sono:

$$y_1 = 0, \qquad\qquad y_2 = \frac{1-r}{r}$$

Il sistema linearizzato nell'intorno del punto $y_1 = 0$ è:

$$y(k+1) = -[r - 2 + 2ry(k)]_{(y=0)}\, y(k) = (2-r)y(k)$$

Il punto di equilibrio $y_1 = 0$ è stabile per $|2 - r| < 1$, cioè per $1 < r < 3$, ed è instabile per $r > 3$ ed $r < 1$. Il sistema linearizzato nell'intorno del punto $y_2 = \frac{1-r}{r}$ è:

$$y(k+1) = -[r - 2 + 2ry(k)]_{\left(y=\frac{1-r}{r}\right)}\, y(k) = r\,y(k)$$

Il punto di equilibrio $y_1 = \frac{1-r}{r}$ è stabile per $0 < r < 1$, mentre è instabile per $r > 1$.

1.b) Posto $r = 3$ il sistema diventa

$$y(k+1) = -y(k) - 3\,y^2(k)$$

Per studiare la stabilità nell'origine si utilizza la funzione $V(y) = y^2 + \alpha y^3$. Tale funzione è definita positiva per qualunque valore di α. Il rapporto incrementale $\Delta V(y)$ è

$$\begin{aligned}
\Delta V(y) &= V(y(k+1)) - V(y(k)) \\
&= (-y - 3\,y^2)^2 + \alpha(-y - 3\,y^2)^3 - y^2 - \alpha y^3 \\
&= y^2 + 6y^3 + 9y^4 - \alpha(y^3 + 9y^4 + 27y^5 + 27y^6) - y^2 - \alpha y^3 \\
&= (6 - 2\alpha)y^3 + (9 - 9\alpha)y^4 - 27\alpha y^5 - 27\alpha y^6
\end{aligned}$$

La funzione $\Delta V(y)$ è definita negativa se si sceglie $\alpha = 3$:

$$\Delta V(y) = -18y^4 - 81y^5 - 81y^6$$

L'origine risulta quindi asintoticamente stabile per $r = 3$.

Per $r = 1$ i due punti di equilibrio coincidono: $y_1 = y_2 = 0$. L'equazione alle differenze del sistema diventa

$$y(k+1) = y(k) - y^2(k)$$

Per studiare la stabilità del punto $y = 0$ si utilizza la funzione

$$V(y) = -y \qquad \rightarrow \qquad \Delta V(y) = -(y - y^2) - (-y) = y^2 > 0$$

Siccome l'origine è punto di accumulazione per l'insieme dei punti in cui $V(y) > 0$, ed essendo $\Delta V(y)$ definita positiva, in base al criterio di instabilità di Lyapunov si può concludere che l'origine è un punto di equilibrio instabile.

Riassumendo, la stabilità dei due punti di equilibrio al variare di $r > 0$ è:

$$y_1 = 0 \ : \begin{cases} 1 < r \leq 3 & \text{as. stabile} \\ r \leq 1 \ \text{ e } \ r > 3 & \text{instabile} \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{1-r}{r} \ : \begin{cases} 1 < r & \text{as. stabile} \\ r \geq 1 & \text{instabile} \end{cases}$$