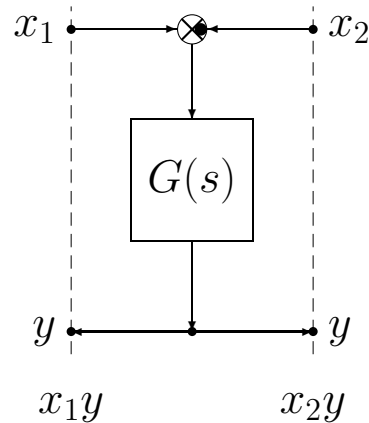


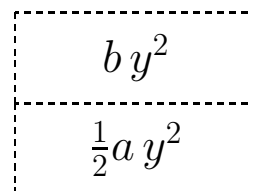
Power-Oriented Graphs (POG)

- Blocco di elaborazione (caso scalare):



$$y(s) = G(s)[x_1(s) - x_2(s)]$$

$$G(s) = \frac{1}{b + a s}$$

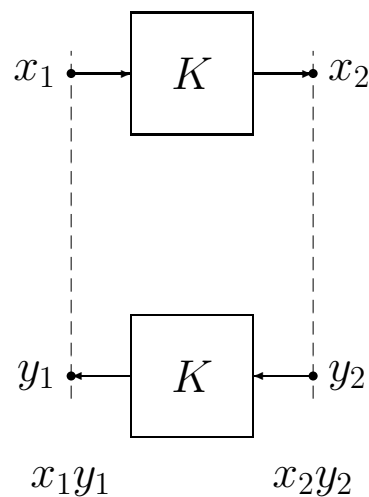


$x_1 y$ $x_2 y$: Potenza che fluisce

$b y^2$: Potenza dissipata

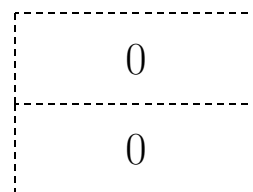
$\frac{1}{2} a y^2$: Energia accumulata

- Blocco di connessione (caso scalare):



$$\begin{cases} x_2 = K x_1 \\ y_1 = K y_2 \end{cases}$$

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$



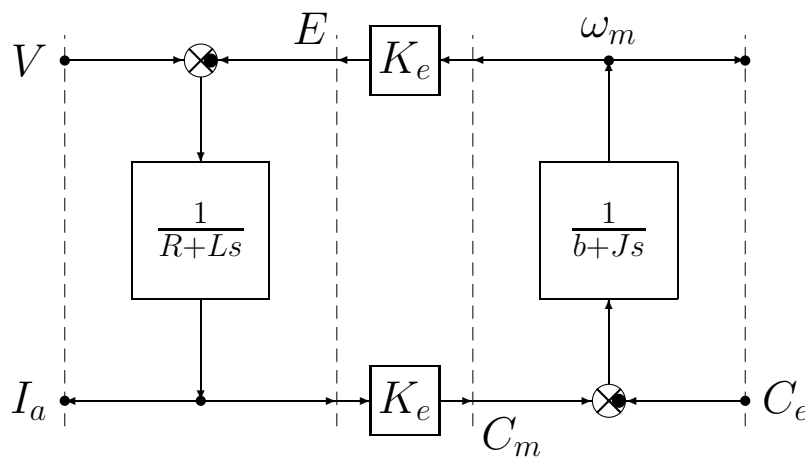
$x_1 y_1$ $x_2 y_2$: Potenza che fluisce

0 : Potenza dissipata

0 : Energia accumulata

- Il prodotto delle variabili accoppiate dalle linee verticali a tratteggio deve avere il significato fisico di una potenza.

- Esempio: motore elettrico in corrente continua:

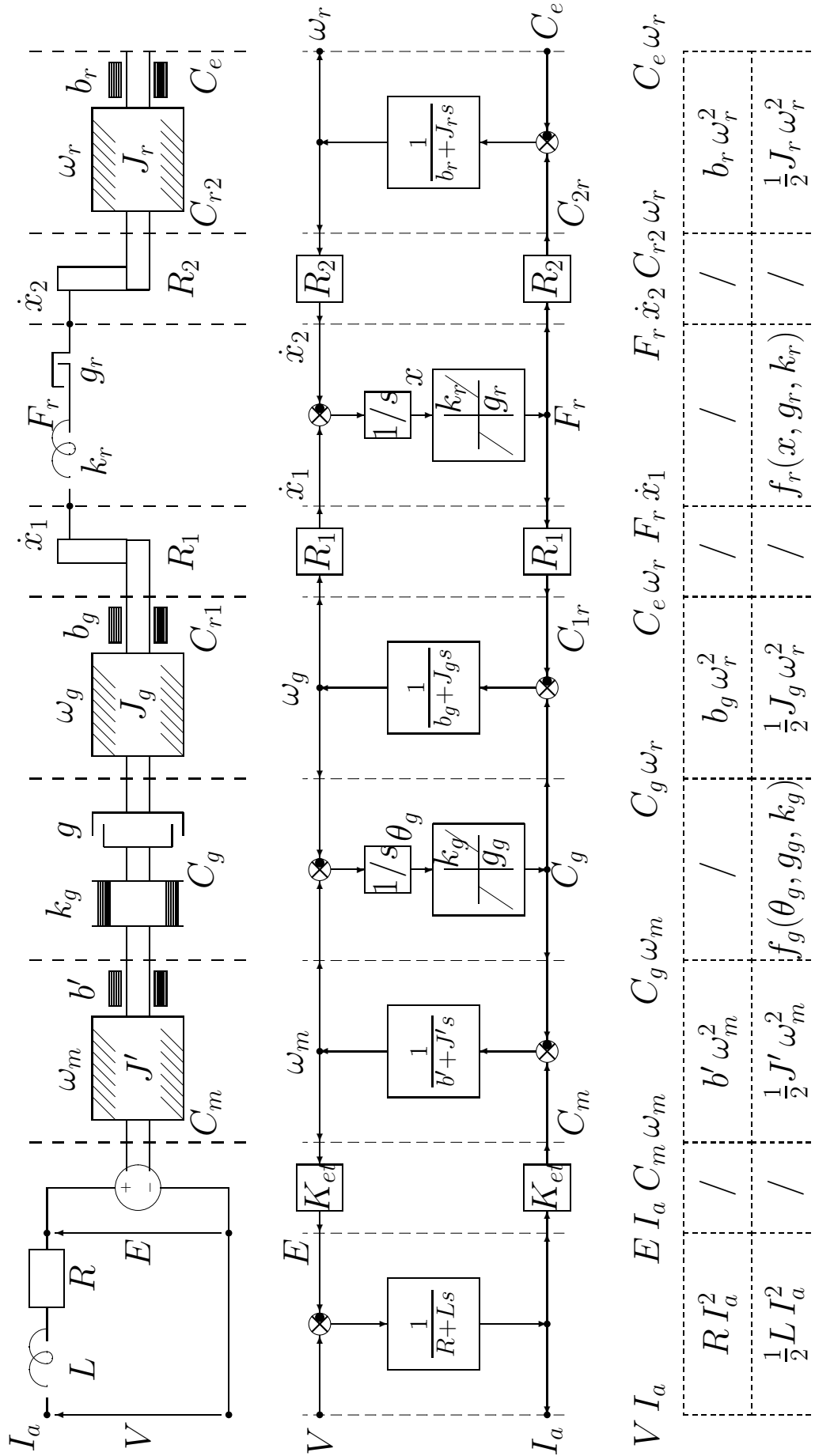


$V I_a$ $E I_a$ $C_m \omega_m$ $C_e \omega_m$: Potenza che fluisce

$R I_a^2$	/	$b \omega_m^2$	: Potenza dissipata
$\frac{1}{2} L I_a^2$	/	$\frac{1}{2} J \omega_m^2$	: Energia accumulata

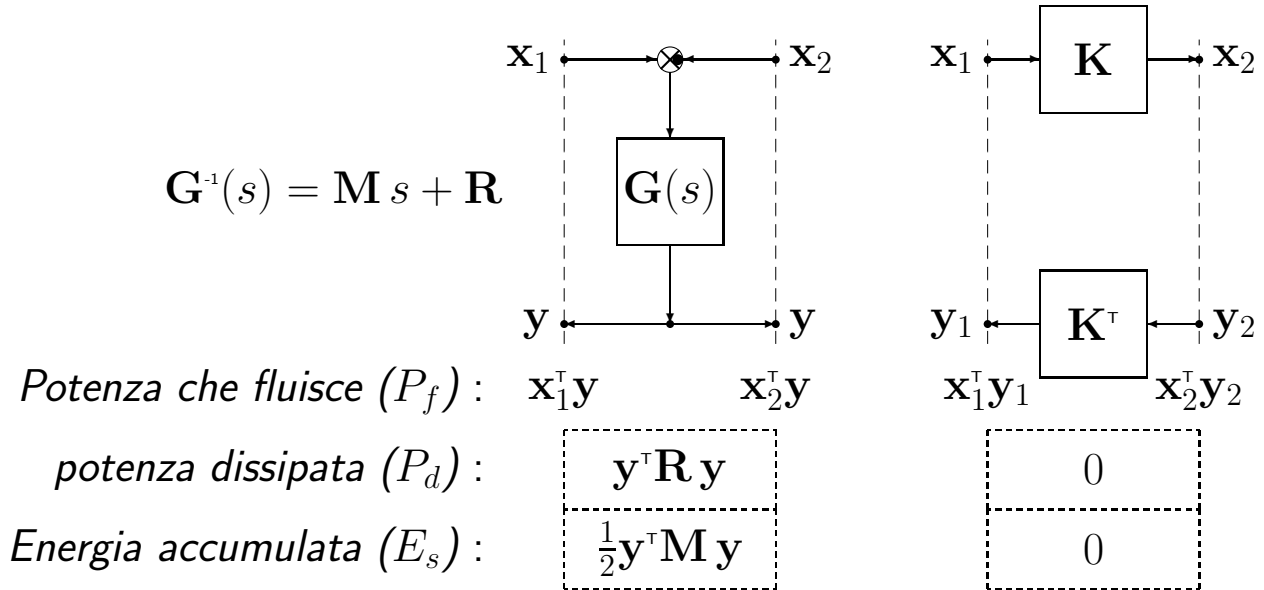
- Il prodotto delle variabili accoppiate ha il significato fisico di una potenza.
- In ogni blocco di elaborazione l'energia viene immagazzinata e/o la potenza viene dissipata (generata).
- Nel blocco di connessione l'energia non viene né accumulata, né dissipata.

Esempio: motore elettrico + giunto elastico/inerziale + ruota dentata + carico inerziale



POG: caso multi-dimensionale

- Le variabili scalari x e y vengono sostituite da vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.



- Il prodotto scalare $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ deve avere il significato fisico di una potenza.
- La matrice $\mathbf{G}(s)$ è sempre una matrice quadrata e simmetrica.
- La matrice $\mathbf{K}$ può anche essere una matrice rettangolare.
- Il blocco di connessione non dissipa né accumula energia, semplicemente “trasforma” le variabili di potenza del sistema da un campo energetico all’altro:

$$\mathbf{x}_1^\top \mathbf{y}_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{K}^\top \mathbf{y}_2) = (\mathbf{K} \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_2^\top \mathbf{y}_2.$$

- Il blocco di elaborazione immagazzina energia e dissipa potenza.
- Per sistemi lineari, energia accumulata E_s e la potenza dissipata P_d sono forme quadratiche, rispettivamente, delle matrici $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{R}$.
- Energia accumulata:

$$E_s = \frac{1}{2} \mathbf{y}^\top \mathbf{M} \mathbf{y}$$

- Potenza dissipata:

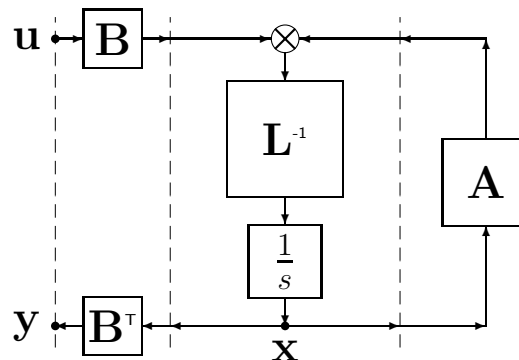
$$P_d = \mathbf{y}^\top \mathbf{R} \mathbf{y}.$$

Descrizione nello spazio degli stati

- Equazioni dinamiche di un sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}^\top\mathbf{x} \end{cases}$$

- Rappresentazione POG:

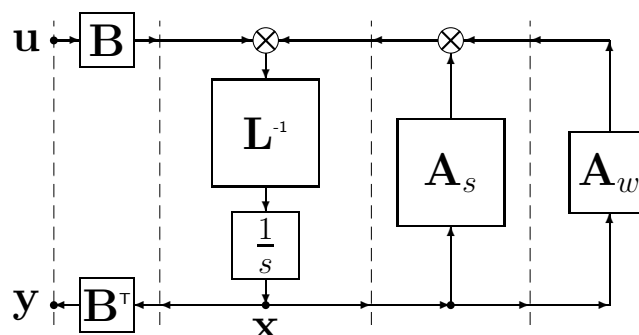


- La tipica forma dei sistemi descritti nello spazio degli stati è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}^\top\mathbf{x}. \end{cases}$$

- La matrice $\mathbf{A}$ può sempre essere espressa come somma di una matrice simmetrica e di una matrice emisimmetrica:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_w.$$



- Teorema: se la parte simmetrica $\mathbf{A}_s$ della matrice di sistema $\mathbf{A}$ è definita negativa, allora il moto libero ($\mathbf{u} = 0$) del sistema è asintoticamente stabile.

Trasformazioni di congruenza nello spazio degli stati

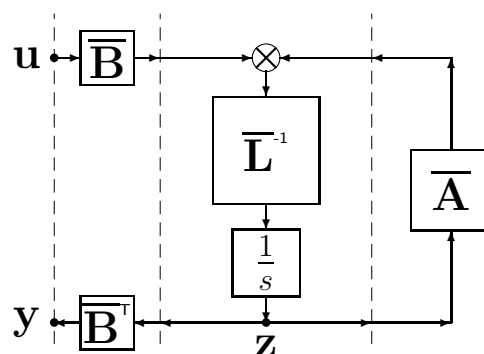
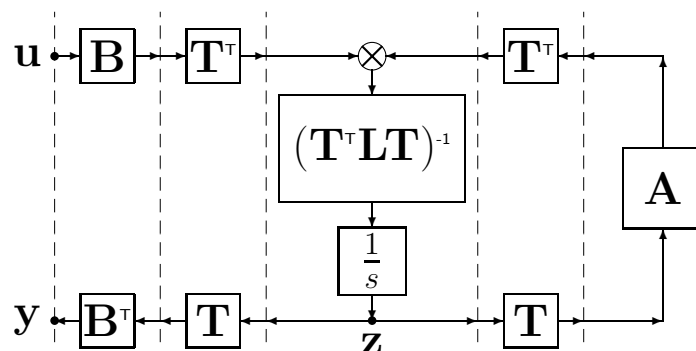
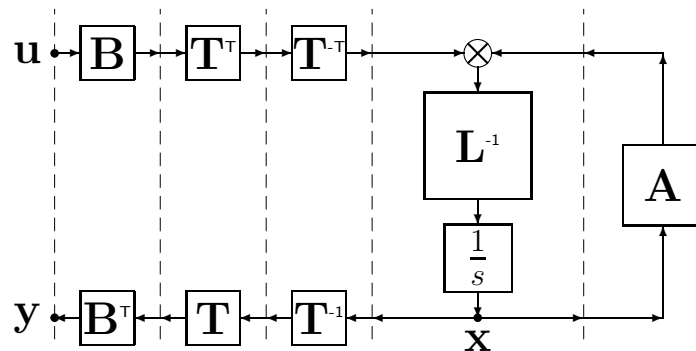
- Cambio di coordinate:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}}$$

- Sistema trasformato:

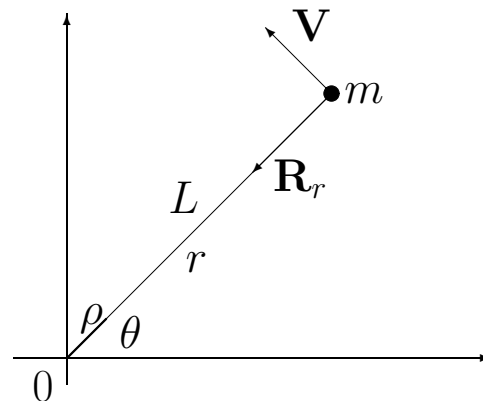
$$\begin{cases} \mathbf{T}^\top \mathbf{L} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^\top \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}^\top \mathbf{T} \mathbf{z} \end{cases}$$

- Rappresentazione POG:

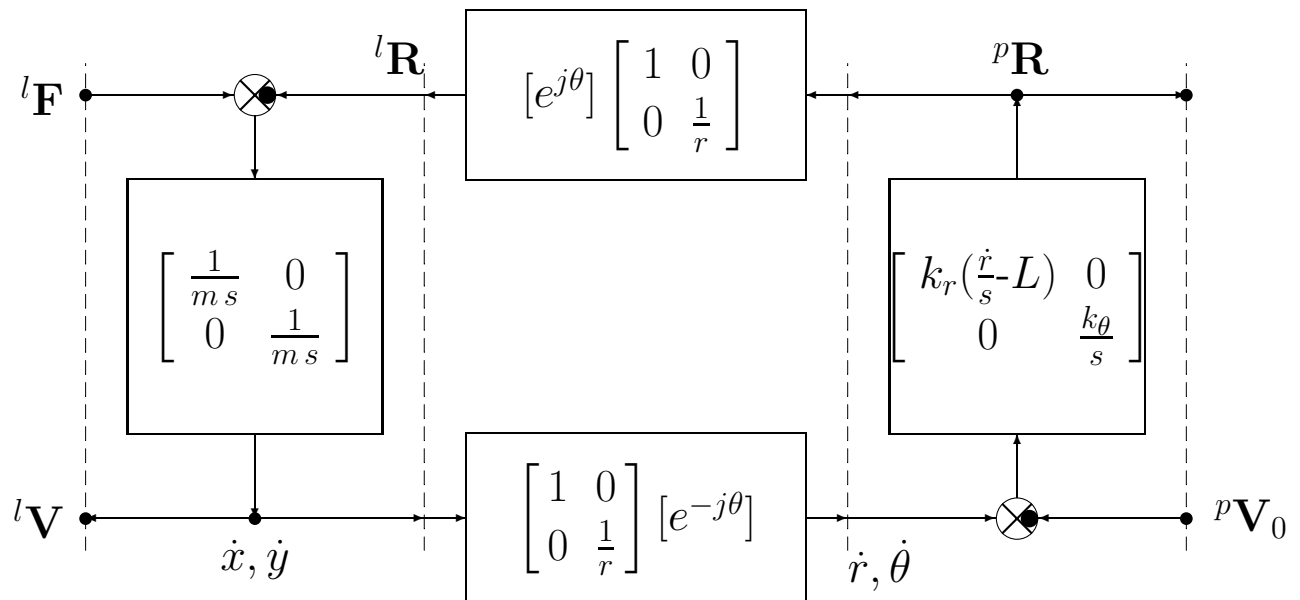


Dinamica nel piano di un punto di massa m

- Il sistema



- La rappresentazione POG:



dove

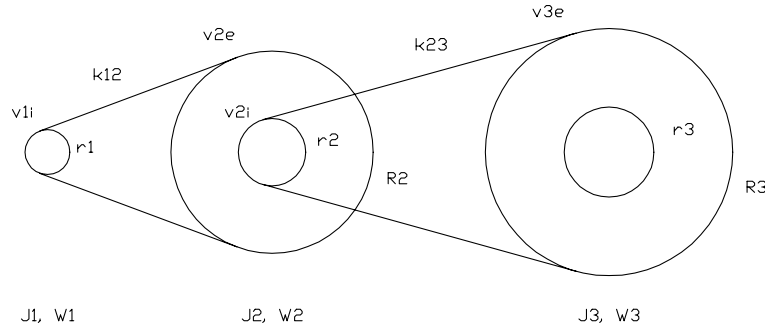
$$[e^{j\theta}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta.$$

- La matrice

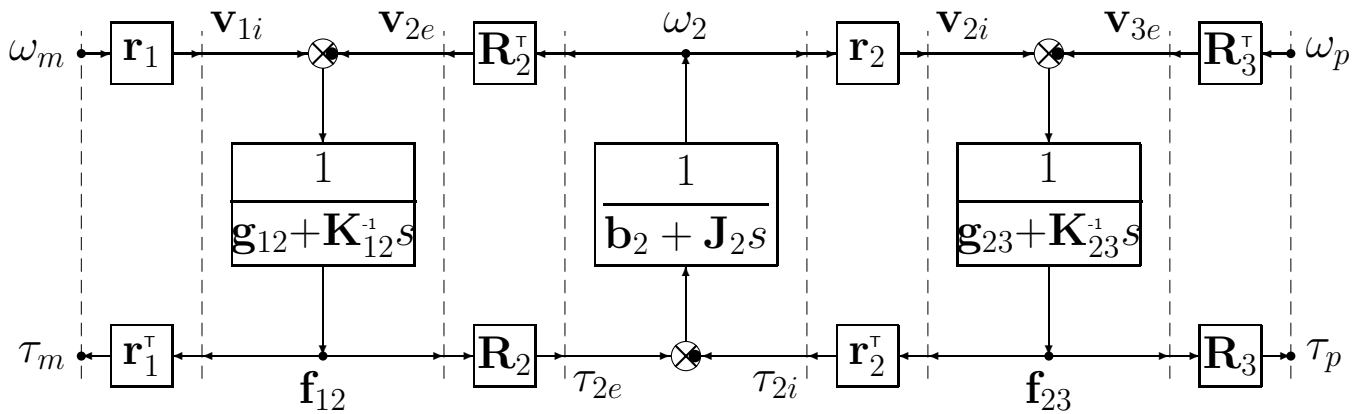
$${}^p\mathbf{T}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} [e^{-j\theta}].$$

è la matrice di trasformazione dello spazio delle velocità lineari $(\dot{x}, \dot{y})$ nello spazio delle velocità polari $(\dot{r}, \dot{\theta})$.

Esempio: sistema di trasmissione a pulegge



- Modello POG del sistema:



- Rappresentazione del sistema nello spazio degli stati:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{23}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{12} \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\mathbf{f}}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}_{12} & -\mathbf{R}_2^T & 0 \\ \mathbf{R}_2 & -\mathbf{b}_2 & -\mathbf{r}_2^T \\ 0 & \mathbf{r}_2 & -\mathbf{g}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{12} \\ \omega_2 \\ \mathbf{f}_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

- Quando il momento di inerzia $\mathbf{J}_2$ della puleggia centrale tende a zero ($\mathbf{J}_2 \rightarrow 0$) si ottiene il seguente legame algebrico tra le variabili di stato:

$$\mathbf{R}_2 \mathbf{f}_{12} - \mathbf{b}_2 \omega_2 - \mathbf{r}_2^T \mathbf{f}_{23} = 0$$

- Se $\mathbf{b}_2$ è invertibile, è possibile esplicitare ω_2 in funzioni delle altre variabili di stato:

$$\omega_2 = \mathbf{b}_2^{-1}(\mathbf{R}_2 \mathbf{f}_{12} - \mathbf{r}_2^T \mathbf{f}_{23}).$$

Calcolo del sistema ridotto quando $\mathbf{J}_2 \rightarrow 0$ e $|\mathbf{b}_2| \neq 0$

- Si consideri la seguente trasformazione di “congruenza”:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{12} \\ \omega_2 \\ \mathbf{f}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{b}_2^{-1} \mathbf{R}_2 & -\mathbf{b}_2^{-1} \mathbf{r}_2^\top \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{12} \\ \mathbf{f}_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{z}$$

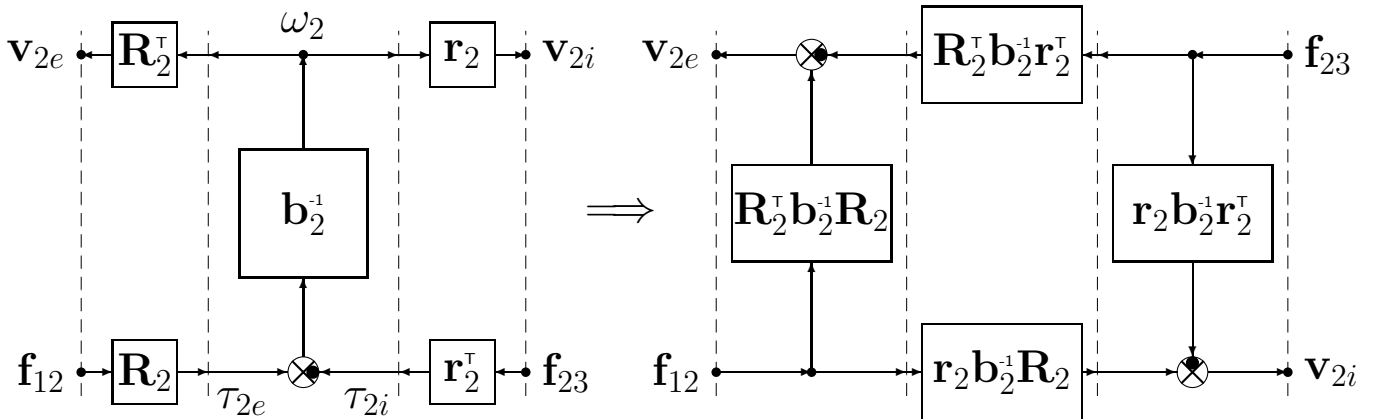
- Il sistema ridotto che si ottiene quando $\mathbf{J}_2 \rightarrow 0$ e $|\mathbf{b}_2| \neq 0$ è il seguente:

$$\mathbf{T}^\top \mathbf{L} \mathbf{T} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^\top \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{u} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{z} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}$$

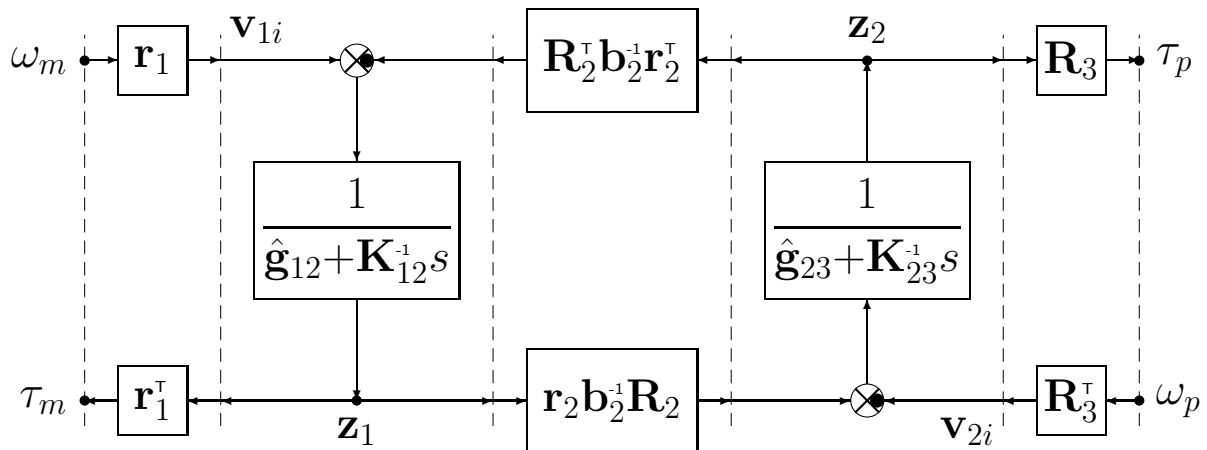
cioè:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{23}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{12} \\ \dot{\mathbf{f}}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}_{12} - \mathbf{R}_2^\top \mathbf{b}_2^{-1} \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_2^\top \mathbf{b}_2^{-1} \mathbf{r}_2^\top \\ \mathbf{r}_2 \mathbf{b}_2^{-1} \mathbf{R}_2 & -\mathbf{g}_{23} - \mathbf{r}_2 \mathbf{b}_2^{-1} \mathbf{r}_2^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{12} \\ \mathbf{f}_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}_3^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_p \end{bmatrix}$$

- Modelli POG equivalenti:



- Modello POG del sistema ridotto:



dove si è posto $\hat{\mathbf{g}}_{12} = \mathbf{g}_{12} + \mathbf{R}_2^\top \mathbf{b}_2^{-1} \mathbf{R}_2$ e $\hat{\mathbf{g}}_{23} = \mathbf{g}_{23} + \mathbf{r}_2^\top \mathbf{b}_2^{-1} \mathbf{r}_2$.

Calcolo del sistema ridotto quando $\mathbf{J}_2 \rightarrow 0$ e $\mathbf{b}_2 \rightarrow 0$

- Si consideri di nuovo il sistema originario:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{23}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{12} \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\mathbf{f}}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}_{12} & -\mathbf{R}_2^\top & 0 \\ \mathbf{R}_2 & -\mathbf{b}_2 & -\mathbf{r}_2^\top \\ 0 & \mathbf{r}_2 & -\mathbf{g}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{12} \\ \omega_2 \\ \mathbf{f}_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}_3^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

- Quando $\mathbf{J}_2 \rightarrow 0$ e $\mathbf{b}_2 \rightarrow 0$, si ottiene il seguente vincolo algebrico:

$$\mathbf{R}_2 \mathbf{f}_{12} - \mathbf{r}_2^\top \mathbf{f}_{23} = 0.$$

- Si consideri la seguente trasformazione di congruenza:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{12} \\ \omega_2 \\ \mathbf{f}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^{-1} \\ 0 \\ \mathbf{r}_2^\top \end{bmatrix} \mathbf{z} = \mathbf{T} \mathbf{z},$$

- La nuova variabile di stato è:

$$\mathbf{z} = \mathbf{R}_2 \mathbf{f}_{12} = \mathbf{r}_2^\top \mathbf{f}_{23}$$

- Il sistema ridotto è il seguente:

$$\mathbf{T}^\top \mathbf{L} \mathbf{T} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^\top \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^\top \mathbf{B} \mathbf{u}$$

cioè:

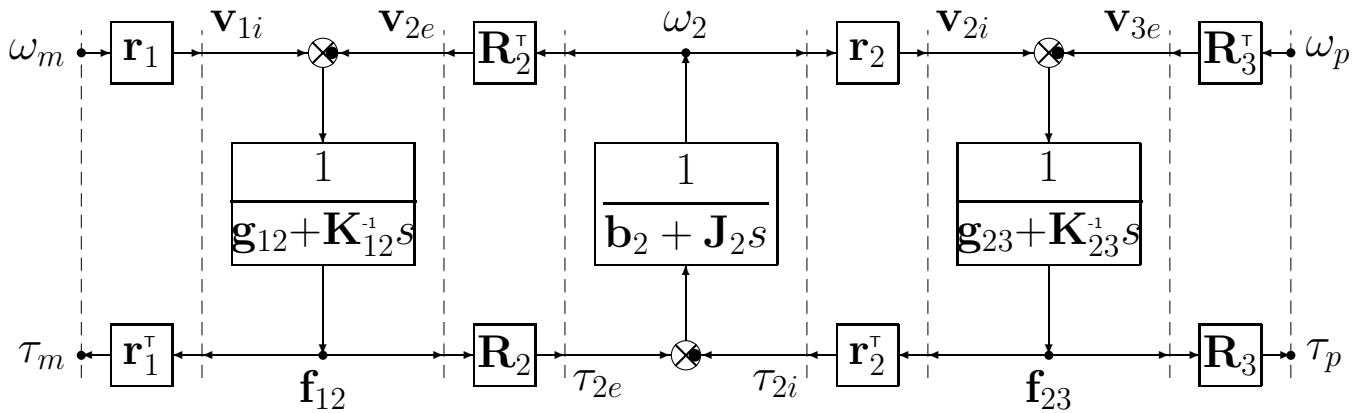
$$[\bar{\mathbf{K}}_{12}^{-1} + \bar{\mathbf{K}}_{23}^{-1}] \dot{\mathbf{z}} = -[\bar{\mathbf{g}}_{12} + \bar{\mathbf{g}}_{23}] \mathbf{z} + [\mathbf{R}_2^\top \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2^\top \mathbf{R}_3^\top] \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_p \end{bmatrix}$$

dove si è posto

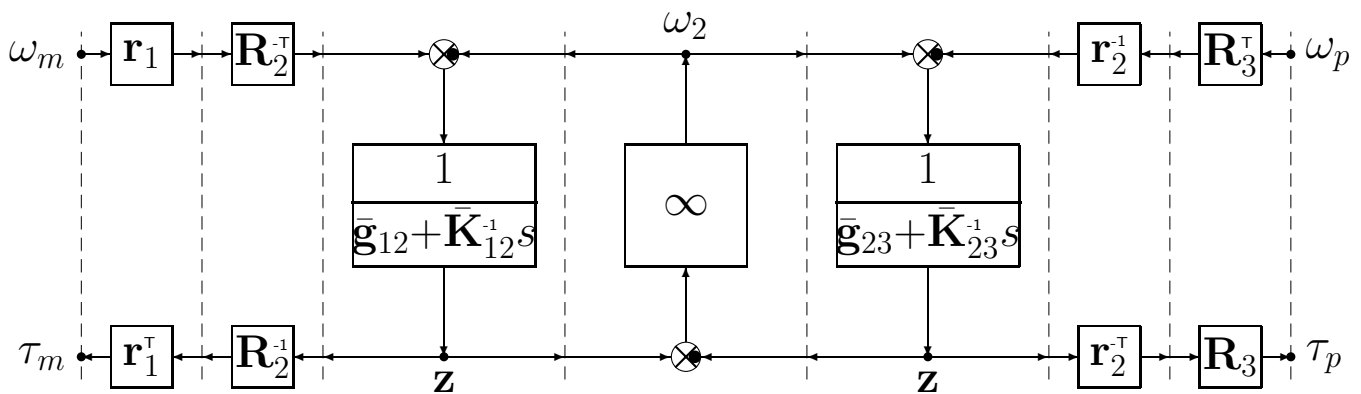
$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{12}^{-1} &= \mathbf{R}_2^\top \mathbf{K}_{12}^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} & \bar{\mathbf{K}}_{23}^{-1} &= \mathbf{r}_2^\top \mathbf{K}_{23}^{-1} \mathbf{r}_2^\top \\ \bar{\mathbf{g}}_{12} &= \mathbf{R}_2^\top \mathbf{g}_{12} \mathbf{R}_2^{-1} & \bar{\mathbf{g}}_{23} &= \mathbf{r}_2^\top \mathbf{g}_{23} \mathbf{r}_2^\top. \end{aligned}$$

Trasformazione grafica: il caso $\mathbf{J}_2 \rightarrow 0$ e $|\mathbf{b}_2| \rightarrow 0$.

- Modello POG del sistema originario:



- Quando $\mathbf{J}_2 \rightarrow 0$ and $|\mathbf{b}_2| \rightarrow 0$ si ha:



- Riducendo graficamente lo schema a blocchi si ottiene il seguente modello ridotto:

