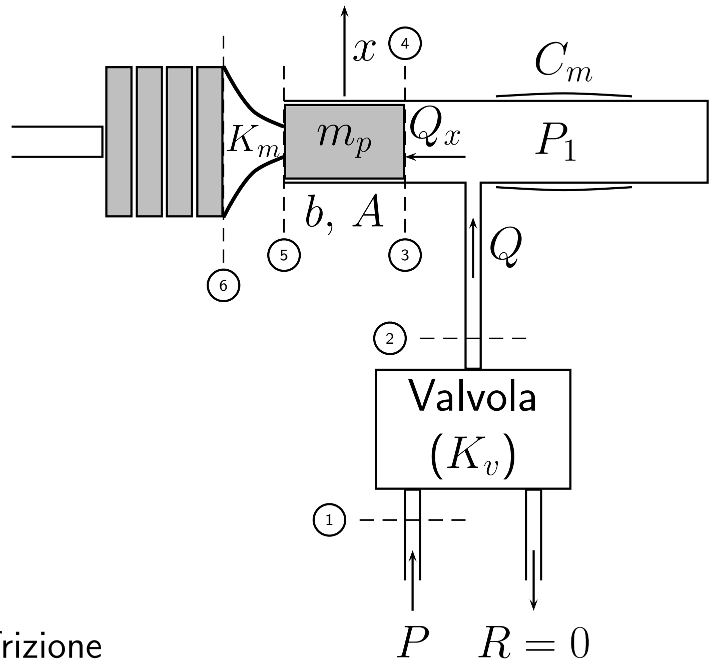
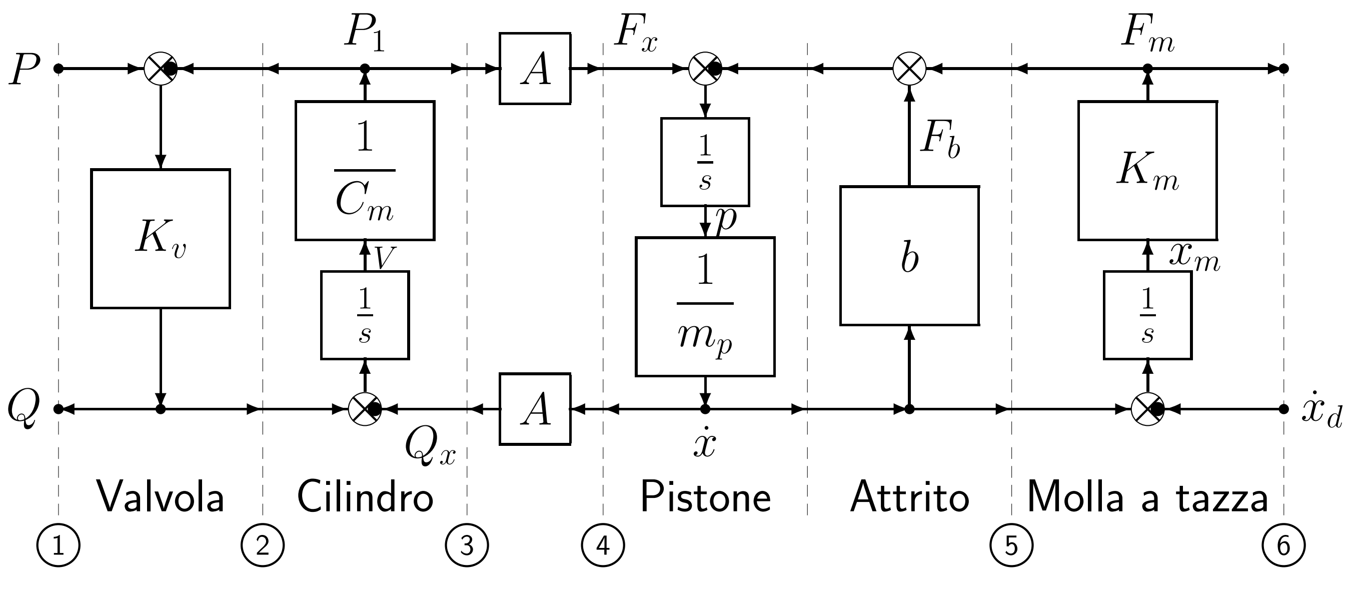
Frizione idraulica: modello nello spazio degli stati

Si consideri il seguente modello idraulico semplificato di una frizione:

P	Pressione di alimentazione
Q	Portata volumetrica nella valvola
K_v	Costante di prop. della valvola
C_m	Capacità idraulica del cilindro
P_1	Pressione all'interno del cilindro
A	Sezione del pistone
x_m	Schiacciamento della molla a tazza
x	Posizione del pistone
$\dot{x}$	Velocità del pistone
m_p	Massa del pistone
b	Attrito lineare del pistone
K_m	Rigidità della molla
F_m	Forza della molla sul pistone
$\dot{x}_d$	Velocità di spostamento dei dischi frizione



Il corrispondente modello dinamico POG è il seguente:



Le sezioni indicate a tratteggio nello schema POG rappresentano "sezioni reali" del sistema fisico attraverso le quali fluisce una potenza il cui valore è pari al prodotto delle variabili che caratterizzano la sezione tratteggiata dello schema a blocchi.

Descrizione del sistema nello spazio degli stati

• Le equazioni che caratterizzano il sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} Q = K_v(P - P_1) \\ C_m \dot{P}_1 = Q - Q_x \\ m_p \ddot{x} = F_x - F_b - F_m \\ F_b = b\,\dot{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} F_m = K_m\, x_m \\ F_x = A\, P_1 \\ Q_x = A\,\dot{x} \\ \dot{x}_m = \dot{x} - \dot{x}_d \end{cases}$$

Quando le equazioni vengono scritte in modo "non organizzato" non è facile capire qual è l'ordine dinamico del sistema e se sono state scritte tutte le equazioni necessarie per la completa definizione del sistema.

• Se il sistema è lineare, uno dei modi migliori per passare dallo schema a blocchi POG al corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati è quello di prendere come variabili di stato le *variabili di potenza* che caratterizzano le uscite degli elementi dinamici presenti all'interno del sistema. Nel caso in esame il vettore di stato $\mathbf{x}$ e il vettore degli ingressi $\mathbf{u}$ sono i seguenti:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} P_1 & \dot{x} & F_m \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} P & \dot{x}_d \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

• È inoltre opportuno che le variabili di stato siano ordinate all'interno del vettore $\mathbf{x}$ secondo l'ordine con cui si susseguono gli elementi dinamici all'interno dello schema POG.

• Siccome il sistema è lineare, il vettore $\mathbf{x}$ delle *variabili di potenza* è legato al vettore $\mathbf{q}$ delle *variabili energia* da equazioni costitutive che sono lineari:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} V \\ p \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m P_1 \\ m_p \dot{x} \\ \frac{1}{K_m} F_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ F_m \end{bmatrix} = \mathbf{L}\,\mathbf{x}$$

• La matrice diagonale $\mathbf{L}$, denominata *matrice energia*, è caratterizzata solo dai *coefficienti energia* delle equazioni costitutive degli elementi fisici.

• L'energia E_a accumulata nel sistema è una funzione quadratica definita positiva della sola matrice energia $\mathbf{L}$ e del vettore di stato $\mathbf{x}$:

$$E_a = \frac{1}{2} \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\, \mathbf{L}\, \mathbf{x}$$

• Le equazioni dinamiche del sistema fisico si ottengono semplicemente scrivendo $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{L}\,\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_q$, dove $\mathbf{x}_q$ è il vettore delle variabili di potenza presenti all'ingresso degli integratori. Per sistemi lineari, il vettore $\mathbf{x}_q$ può sempre essere espresso come combinazione lineare del vettore di stato $\mathbf{x}$ e del vettore di ingresso $\mathbf{u}$: $\mathbf{x}_q = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$. Nel caso in esame si ha che:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_m & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \ddot{x} \\ \dot{F}_m \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -K_v & -A & 0 \\ A & -b & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ F_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_v & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} P \\ \dot{x}_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

Scritto in forma vettoriale, il sistema assume la forma:

$$\mathbf{L}\,\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$$

• Si noti che procedendo in questo modo la matrice $\mathbf{A}$ assume una forma particolare: riscrivendo la matrice $\mathbf{A}$ come somma della sua parte simmetrica $\mathbf{A}_s = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}})/2$ e della sua parte emisimmetrica $\mathbf{A}_w = (\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}})/2$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -K_v & -A & 0 \\ A & -b & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -K_v & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -A & 0 \\ A & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_w} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_w$$

ci si accorge che:

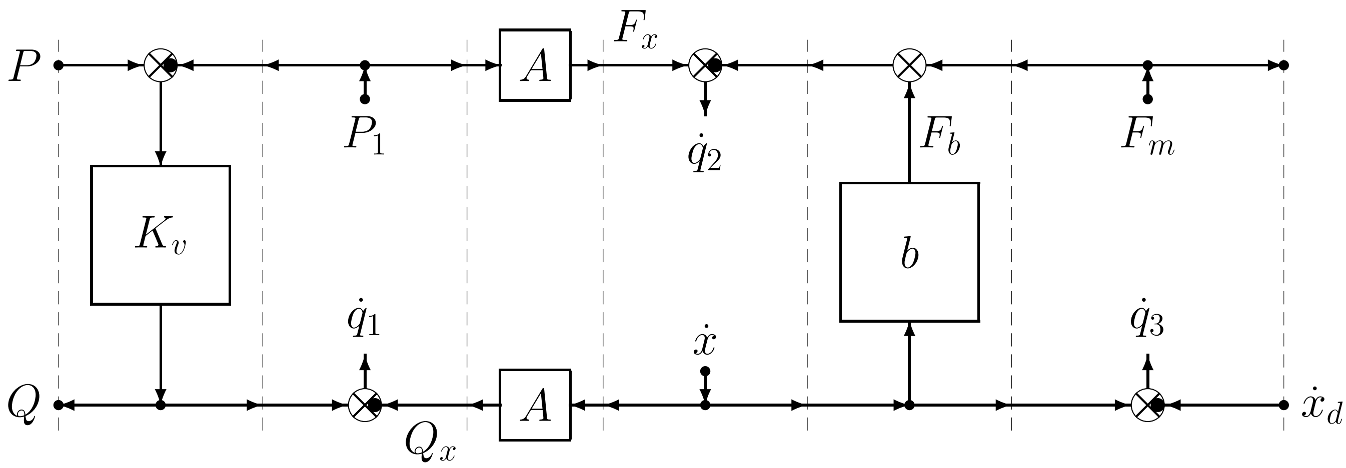
1) la matrice simmetrica $\mathbf{A}_s$ *è funzione dei soli parametri statici* del sistema: K_v e b. La potenza P_d dissipata nel sistema è una funzione quadratica della sola matrice $\mathbf{A}_s$ e del vettore di stato $\mathbf{x}$:

$$P_d = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{A}_s\,\mathbf{x}$$

2) la matrice emisimmetrica $\mathbf{A}_w$ *è funzione soltanto dai parametri di "collegamento"* tra i vari elementi dinamici del sistema: blocco di connessione A e sezione 5. La matrice $\mathbf{A}_w$ rappresenta una *ridistribuzione dell'energia all'interno del sistema*, infatti la forma quadratica basata sulla matrice $\mathbf{A}_w$ è sempre nulla:

$$0 = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{A}_w\,\mathbf{x}$$

• Il calcolo del vettore $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$, e quindi delle matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, risulta particolarmente agevole se dallo schema POG originario si tolgono gli elementi dinamici lasciando in evidenza le variabili di potenza e gli ingressi $\dot{q}_i$ dei vari integratori:



$$\mathbf{L}\,\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -K_v & -A & 0 \\ A & -b & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ F_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_v & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} P \\ \dot{x}_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

• Moltiplicando a sinistra questa equazione per la matrice $\mathbf{L}^{-1}$ si porta il sistema nella forma "classica" utilizzata nell'analisi dei sistemi dinamici:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}}_{\overline{\mathbf{A}}}\,\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}}_{\overline{\mathbf{B}}}\,\mathbf{u} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{A}}\,\mathbf{x} + \overline{\mathbf{B}}\,\mathbf{u}$$

• In questo caso la variabile di uscita di interesse, $\mathbf{y} = F_m$, coincide con la terza componente del vettore di stato:

$$\mathbf{y} = F_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \dot{x} \\ F_m \end{bmatrix} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}$$

• Si noti che se si opera la trasformazione $\mathbf{q} = \mathbf{L}\,\mathbf{x}$ (cioè $\mathbf{x} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{q}$) nello spazio degli stati, il sistema in oggetto può essere descritto in modo equivalente nel seguente modo utilizzando le variabili energia $\mathbf{q}$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}\,\mathbf{L}^{-1}\mathbf{q} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}$$

• Sarebbe la descrizione dinamica più appropriata, ma l'uso delle variabili energia $\mathbf{q}$ come variabili di stato non è la più frequente.