

INTRODUZIONE AL CONTROLLO OTTIMO

Teoria dei Sistemi

Ingegneria Elettronica, Informatica e TLC

Prof. Roberto Zanasi, Dott. Giovanni Azzone

DII - Università di Modena e Reggio Emilia

AUTOLAB: Laboratorio di Automazione

http://www.dii.unimo.it/zanasi/ELECOM/ELECOM_Automatica.html

E-mail: roberto.zanasi@unimore.it,
giovanni.azzone@unimore.it

Tecniche classiche di controllo

- Tecniche "*classiche*" - Basate su specifiche:
 - nel dominio dei tempi (tempo di salita, sorpasso percentuale, errori a regime, ...)
 - nel dominio delle frequenze (margini di fase e/o di ampiezza).
- Soluzione in generale non univoca e procedimenti per tentativi

CONTRO

- Non facilmente estendibili a sistemi MIMO
- Non si tiene conto dell'energia necessaria per il controllo
- Più soluzioni fra le quali non necessariamente quella ottima
- Non applicabili a modelli non stazionari
- Se non si soddisfano le specifiche, non si può dire se è a causa dell'insufficienza delle tecniche a disposizione o per la incompatibilità di alcuni degli obiettivi.

Tecniche di controllo ottimo

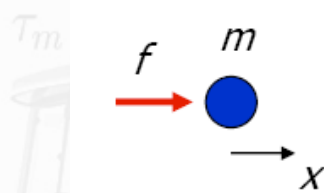
- Il “*problema di controllo ottimo*” è costituito da:
 - Il modello che descrive il comportamento del sistema dinamico da controllare
 - Indice di comportamento J (o criterio di ottimalità) che descrive le esigenze del progettista.

$$J = J[u(t), x(t), x(t_f), t_f]$$

- In genere l'espressione dell'indice di comportamento si sceglie in base alle esigenze di progetto.
- Le prestazioni del sistema sono quindi definite ottime rispetto all'indice definito.
- La difficoltà maggiore sta proprio nella definizione dell'indice in base alle specifiche concrete di progetto.

Legge di controllo in "open loop"

- Sia dato un punto materiale di massa m che si muove di moto rettilineo; su di esso si agisce con una forza $f(t)$ manipolabile nella direzione del moto.



$$m\ddot{x}(t) = f(t), \quad x(0) = x_{10}, \quad \dot{x}(0) = x_{20}.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2(t) = u(t), & x_2(0) = x_{20}. \end{cases}$$

$$J = c_1 x_1^2(t_f) + \int_0^{t_f} c_2 u^2(t) dt, \quad c_1, c_2 > 0, \quad c_1 = c_2 = 1.$$

- Specifiche: il punto materiale sia sufficientemente vicino all'origine all'istante finale e l'azione di controllo (energia di controllo) sufficientemente limitata.
- Possibili andamenti di $u(t)$ in $[0, t_f]$:
 1. Costante nel tempo;
 2. Lineare nel tempo.

Legge di controllo in "open loop"

1. Controllo costante nel tempo: $u_c(t) \simeq -0.219,$

$$\begin{cases} x_1(t) \simeq 1 + t - 0.1096t^2, \\ x_2(t) \simeq 1 - 0.219t. \end{cases}$$

$$J[u_c(t)] \simeq 0.482.$$

2. Lineare nel tempo: $u_l(t) \simeq -0.0329(10 - t),$

$$\begin{cases} x_1(t) \simeq 1 + t - \frac{1}{2}0.329t^2 + \frac{1}{6}0.0329t^3, \\ x_2(t) \simeq 1 - 0.329t + \frac{1}{2}0.0329t^2. \end{cases}$$

$$J[u_l(t)] \simeq 0.362.$$

Con la scelta "a tentativi" della legge di controllo non si è certi di minimizzare l'indice di comportamento.

Problema di controllo ottimo

- E' costituito dal modello matematico del sistema dinamico:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x_{n \times 1}, \quad u_{r \times 1}$$

$$\chi[x(t_f), t_f] = 0, \quad \chi_{q \times 1}$$

e dall'indice di comportamento

$$J = \underbrace{\beta[x(t_f), t_f]}_{\text{"Peso" sullo stato finale}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u, t) dt}_{\text{"Peso" sulla evoluzione in } [t_0, t_f]}$$

"Peso" sullo stato finale

"Peso" sulla evoluzione in $[t_0, t_f]$

*Problema
di controllo
ottimo*

- Problema di controllo ottimo: determinare $u^\circ(t)$ in $[t_0, t_f]$ in modo da minimizzare l'indice J .

- L'equazione vettoriale χ (in genere $q \leq n$ equazioni) rappresenta un insieme ammissibile (vincoli) dello stato all'istante finale.

- Per avere soluzione, almeno uno degli elementi $\chi[x(t_f), t_f]$ deve essere raggiungibile a partire da x_0

Problema di controllo ottimo

- Condizione necessaria perché il problema di controllo ottimo ammetta soluzione, cioè perché la soluzione $u^\circ(t)$ in $[t_0, t_f]$ se esiste, sia ottima è che, definita la *funzione hamiltoniana*:

$$H(x, u, \lambda, t) := f_0(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t),$$

Funzione dell'indice di comportamento

Dinamica del sistema

Co-stato o variabili aggiunte (n)

in corrispondenza di $u^\circ(t)$ siano soddisfatte le equazioni di *Eulero-Lagrange*:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -H_x^T, \\ \lambda(t_f) = [(\beta_x + \nu^T \chi_x)^T]_{t=t_f}, \end{cases}$$

Sistema aggiunto: dinamica delle covariabili di stato

$$H_u = 0,$$

Condizione di stazionarietà: la funzione hamiltoniana è costante sulla traiettoria ottima

- Se t_f non è specificato, deve essere soddisfatta la seguente condizione:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\beta + \nu^T \chi) + H \right]_{t=t_f} = 0.$$

- Two-point boundary value problem: condizioni iniziali su x e finali su λ .

Casi particolari

- Casi particolari di problemi di controllo ottimo:

1. Non ci sono vincoli sullo stato all'istante finale t_f
2. I vincoli sullo stato all'istante finale sono espressi da equazioni algebriche separate nelle variabili di stato
3. Il criterio di bontà è dato dalla durata dell'intervallo di tempo $[t_o, t_f]$ (controllo in tempo minimo)

4. Controllo "LQ" (Lineare Quadratico): modello del sistema dinamico lineare e indice di comportamento in forma quadratica.

Controllo ottimo LQ

- Il sistema dinamico da controllare è lineare e le funzioni che compaiono nell'indice di comportamento sono quadratiche.

- Il modello diviene:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x_{n \times 1}, \quad u_{r \times 1},$$

$$J = x^T(t_f)S_f x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + \underbrace{u^T(t)R(t)u(t)}_{\text{Potenza di controllo}}] dt,$$

- Le matrici S_f , $Q(t)$ ed $R(t)$ sono solitamente diagonali e semidefinite positive.

$$S_f = S_f^T \geq 0, \quad Q(t) = Q(t)^T \geq 0, \quad R(t) = R(t)^T \geq 0.$$

- Possibile non stazionarietà delle matrici $Q(t)$ ed $R(t)$.

Definizione di s.d.p.: $A \geq 0 \iff x^T A x \geq 0, \forall x \in R^n.$

Controllo ottimo LQ

- Si dimostra che condizione necessaria per la risoluzione del problema è che, definita la funzione hamiltoniana

$$H = x^T Q x + u^T R u + \lambda^T (A x + B u)$$

risulti

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x^T = -2Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t),$$

$$\lambda(t_f) = 2S_f x(t_f),$$

$$H_u^T = 2R(t)u(t) + B^T(t)\lambda(t) = 0;$$

- La legge di controllo diviene quindi:

$$u(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t).$$

- $R(t)$ deve essere non singolare per poter essere invertibile.

Controllo *bang-bang*

- Tipologia di controllo che si presenta quando esiste un dominio di ammissibilità su $u(t)$, cioè una limitazione sulla possibile azione di controllo.
- Si dimostra che la legge di controllo ottimo è definita come:

$$u(t) = -\text{sign}(x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)|).$$

- E' quindi un controllo discontinuo.

Esempio. Si consideri ancora il punto materiale in moto rettilineo. Si determini la legge di controllo $u(t)$ che porti il punto nell'origine con velocità finale nulla in tempo minimo.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$x_1(0) = x_{10},$$

$$x_1(t_f) = 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t),$$

$$x_2(0) = x_{20},$$

$$x_2(t_f) = 0,$$

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f,$$

$$|u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$

Limitazione sul controllo.

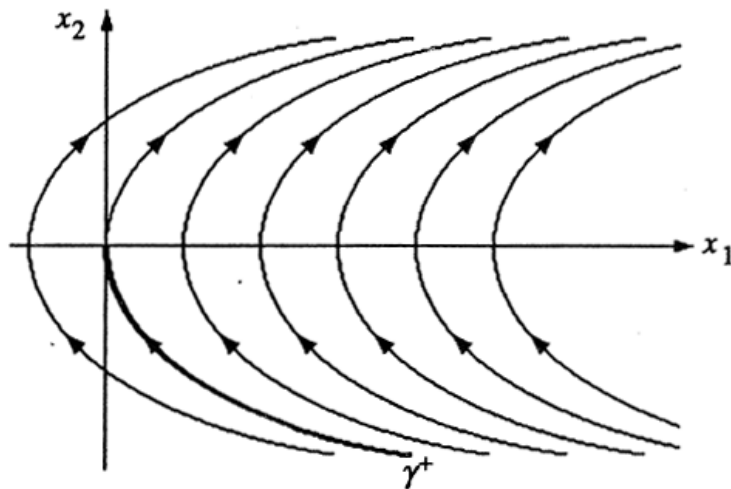
Controllo *bang-bang*

Analisi delle traiettorie.

Integrando le equazioni di stato, si ottiene la famiglia di traiettorie nello spazio degli stati:

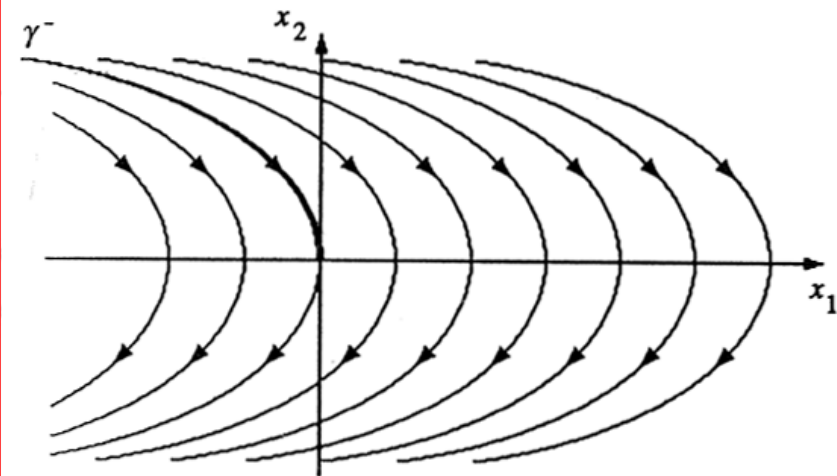
$$u(t) = \pm 1 \Rightarrow x_1(t) = \pm \frac{1}{2}x_2^2(t) + x_{10} \mp \frac{1}{2}x_{20}^2.$$

Solo gli archi di parabola γ^+ e γ^- conducono alla condizione finale imposta $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$.



La soluzione $u(t)=1$ è valida se e solo se la condizione iniziale (x_{10}, x_{20}) si trova sull'arco di parabola γ^+ , cioè:

$$x_{10} = \frac{1}{2}x_{20}^2, \quad x_{20} < 0$$



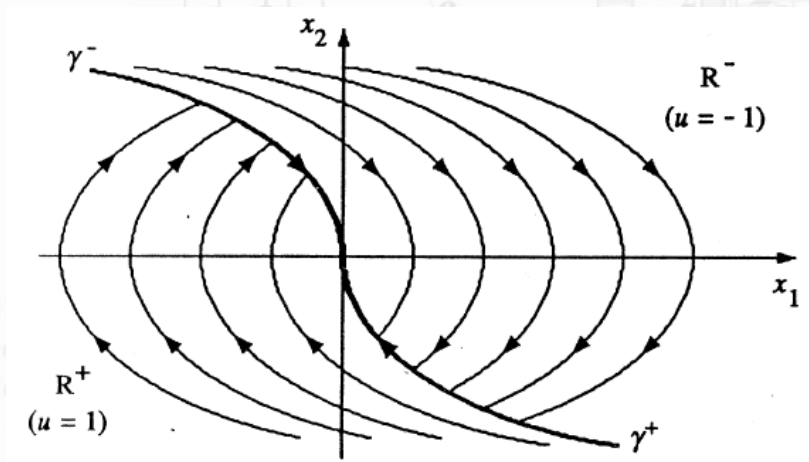
La soluzione $u(t)=-1$ è valida se e solo se la condizione iniziale (x_{10}, x_{20}) si trova sull'arco di parabola γ^- , cioè:

$$x_{10} = -\frac{1}{2}x_{20}^2, \quad x_{20} > 0$$

Controllo *bang-bang*

Analisi delle traiettorie.

Dall'esame delle soluzioni ottenute si può ricavare la soluzione per il caso generale nel quale la condizione iniziale (x_{10}, x_{20}) non si trova sulla curva (γ^+, γ^-) . Tale curva divide il piano delle fasi in due regioni, R^+ ed R^- .



Il valore iniziale della legge di controllo è $u(t)=1$ se (x_{10}, x_{20}) si trova in R^+ , $u(t)=-1$ se si trova in R^- .

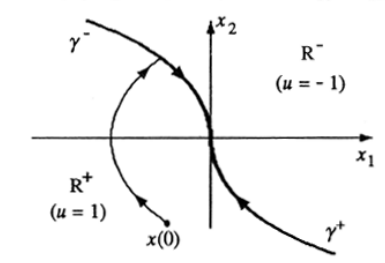
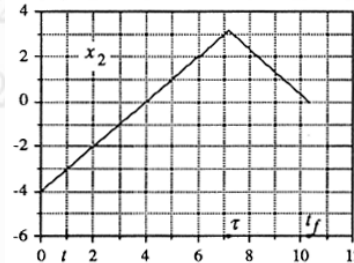
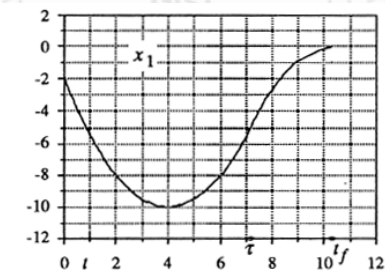
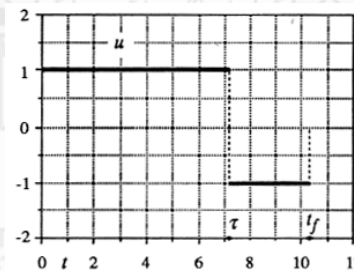
Tale legge di controllo resta immutata fino a che la traiettoria non incontra la curva (γ^+, γ^-) : a questo punto si ha la commutazione al valore opposto.

Esempio numerico in cui $x_{10}=-2$ e $x_{20}=-4$.

Si parte con un controllo positivo.

La traiettoria incontra la curva (γ^+, γ^-) .

Il controllo commuta e si raggiunge lo stato finale.



Controllo LQ in retroazione

- Una legge di controllo ottima può essere definita:
 - In catena aperta: non dipende dallo stato $x(t)$, e viene realizzata sulla base di conoscenze pregresse.
 - In retroazione: la legge di controllo dipende dallo stato.
- Solitamente si preferisce una soluzione in retroazione perché consente di aumentare la robustezza del sistema (insensibilità ai disturbi esterni ed alle variazioni parametriche nel *plant*).
- Il "controllo ottimo", se esiste, è unico. Definire una legge di controllo ottimo in retroazione non significa cercare una diversa legge di controllo, ma una sua differente realizzazione.
- Si tratta di esprimere la legge di controllo non più come semplice funzione di t , ma come funzione dello stato.
- Il "principio di ottimalità di Bellman" assicura che tale realizzazione esiste, ma non dice come realizzarla.

Controllo LQ in retroazione

- A partire dal modello del sistema nel caso di controllo ottimo LQ, presentato in precedenza, si era arrivati a definire la legge di controllo:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x_{n \times 1}, \quad u_{r \times 1},$$

$$J = x^T(t_f)S_f x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt,$$

$$u(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t).$$

- Dalle condizioni al contorno all'istante finale del vettore $\lambda(t)$ e procedendo con alcune ipotesi, si arriva a dimostrare che la legge di controllo ottimo LQ diviene:

$$u(t) = K(t)x(t), \quad K(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)S(t).$$

- Problema: calcolo della matrice $S(t)$.

Controllo LQ in retroazione

- Si dimostra che $S(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale di *Riccati*:

$$\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t) - S(t)B(t)R^{-1}B^T(t)S(t) + Q(t) = 0,$$
$$S(t_f) = S_f.$$

- Finora è stato considerato il progetto del controllo ottimo in cui t_f era assegnato o finito: l'evoluzione del sistema avveniva in $[t_0, t_f]$.
- Matrici tempo varianti (equazione di Riccati non sempre di facile soluzione).
- Soluzione a regime. Controllo ottimo LQ tempo infinito ($t_f \rightarrow \infty$). Si dimostra che $S(t)$ tende a S , che è soluzione dell'equazione algebrica di Riccati (ARE):

$$SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + C^T QC = 0,$$

$$u(t) = K(t)x(t), \quad K(t) = -R^{-1}B^T S.$$