

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito A del 25 gennaio 2011
Domande ed esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec.

1. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale lineare e tempo-variante $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$ essendo $\mathbf{x}(t_0)$ lo stato all'istante iniziale t_0 :

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

2. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\Phi(k, h)$ di un sistema dinamico $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$ discreto lineare tempo-variante:

$$\Phi(k, h) = \begin{cases} \mathbf{A}(k-1) \dots \mathbf{A}(h+1)\mathbf{A}(h) & \text{se } k > h \\ \mathbf{I} \text{ (Matrice identità)} & \text{se } k = h \end{cases}$$

3. Scrivere la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ essendo $\mathbf{x}(h)$ lo stato all'istante iniziale h .

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{k-h}\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

4. Calcolare la matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$ e la matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

5. Sia dato un sistema dinamico "POG" lineare nella forma $\mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ con $\mathbf{L}$ matrice simmetrica definita positiva. Quali di queste espressioni esprime in modo corretto la matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ che lega il vettore d'ingresso $\mathbf{U}(s)$ al vettore d'uscita $\mathbf{Y}(s)$?

- ☐ $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$
☒ $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{L} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$
☐ $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$
☒ $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$

6. Una matrice $\mathbf{A}$ di dimensione n è diagonalizzabile

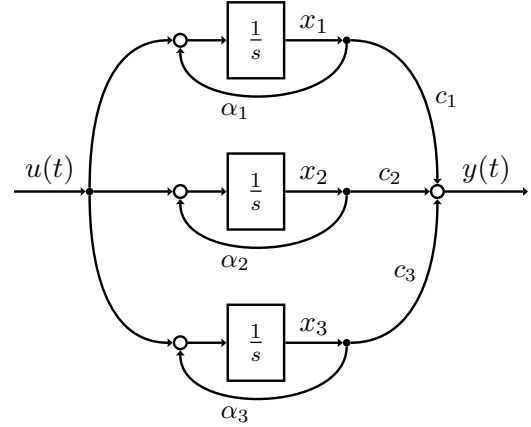
- ☒ se ha n autovalori reali distinti;
☒ se ha n autovettori linearmente indipendenti;
☒ se i miniblocchi di Jordan hanno tutti dimensione unitaria;
☐ se gli autovalori sono radici multiple del polinomio caratteristico;

7. Si consideri il problema di controllo punto a punto per un sistema lineare tempo-discreto. Tra le infinite soluzioni $\mathbf{u}$ che permettono far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(k)$ nell'intervallo di tempo $[0, k]$ indicare la struttura della soluzione $\mathbf{u}$ che minimizza la norma euclidea $\|\mathbf{u}\|$:

$$\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T [\mathcal{R}_k^+ (\mathcal{R}_k^+)^T]^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)]$$

8. Disegnare lo schema a blocchi associato al seguente sistema tempo-continuo posto in forma canonica di Jordan dove $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [c_1 \ c_2 \ c_3] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$



9. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} e^{2t} & t e^{2t} & \frac{t^2}{2} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & t e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$$

10. Data la funzione di trasferimento $G(s)$, scrivere la struttura del corrispondente sistema dinamico in forma canonica di raggiungibilità indicando con $u(t)$ l'ingresso e con $y(t)$ l'uscita:

$$G(s) = 2 + \frac{3s^3 + 6s^2 + 2s + 4}{s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 3s + 7} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & -3 & -5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [4 \ 2 \ 6 \ 3] \mathbf{x}(t) + [2] u(t) \end{cases}$$

11. Sia dato un sistema lineare SISO del quarto ordine ($n = 4$), completamente osservabile, caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

a) Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_o$, $\mathbf{b}_o$ e $\mathbf{c}_o$ della corrispondente forma canonica di osservabilità. Sia $p(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_3 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_o = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

b) Indicare inoltre la struttura della matrice $\mathbf{P}$ che, unita alla trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_o$, porta il sistema originario in forma canonica di osservabilità.

$$\mathbf{P} = [(\mathcal{O}_c^-)^{-1} \mathcal{O}^-]^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^3 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

12. Sia dato un sistema dinamico SISO lineare e tempo continuo: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$, $y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$ con $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ e $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$. Indicare il numero totale N di parametri a_{ij} , b_i e c_j non costanti che caratterizza una qualsiasi forma canonica del sistema di partenza:

$$N = 2n$$

13. Enunciare il *Lemma di Heymann*:

Se $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ è raggiungibile e se $\mathbf{b}_i$ è una colonna non nulla di $\mathbf{B}$, allora esiste una matrice $\mathbf{M}_i \in \mathcal{R}^{m \times n}$ tale che $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{M}_i, \mathbf{b}_i)$ è raggiungibile.

14. Dato il sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, riportare la struttura di:

a) uno stimatore asintotico dello stato in catena chiusa di ordine pieno:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t)$$

b) l'evoluzione temporale dell'errore di stima $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ che si ha a partire da un'errore di stima iniziale $\mathbf{e}(0)$:

$$\mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})t} \mathbf{e}(0)$$

15. Scrivere come si determina la matrice $\mathbf{P}^{-1}$ della trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$ che porta un sistema non completamente osservabile in forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \text{Im}\mathbf{P}_1^T = \text{Im}(\mathcal{O}^-)^T \text{ e } \mathbf{P}_2 \text{ rende non singolare la matrice } \mathbf{P}^{-1}.$$

Indicare inoltre la struttura a blocchi delle matrici $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ e $\bar{\mathbf{C}}$ che si ottengono:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & 0 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_1 \quad 0]$$

16. Relativamente al sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$, scrivere in termini delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ una condizione necessaria e sufficiente per la completa ricostruibilità del sistema:

$$\mathcal{E}^- = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \subseteq \ker \mathbf{A}^n$$

17. Enunciare il criterio diretto di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi tempo continui.

Si consideri il sistema non lineare $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0)$ e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\mathbf{u}_0$.

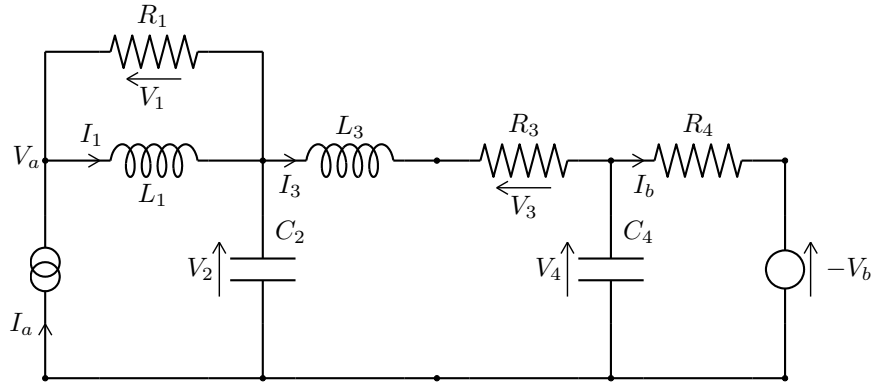
1) Se in un intorno W di $\mathbf{x}_0$ esiste una funzione $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ definita positiva con derivate prime continue e se $\dot{V}(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa, allora il punto $\mathbf{x}_0$ è stabile per il sistema non lineare.

2) Se inoltre $\dot{V}(\mathbf{x})$ è definita negativa, allora l'origine è asintoticamente stabile.

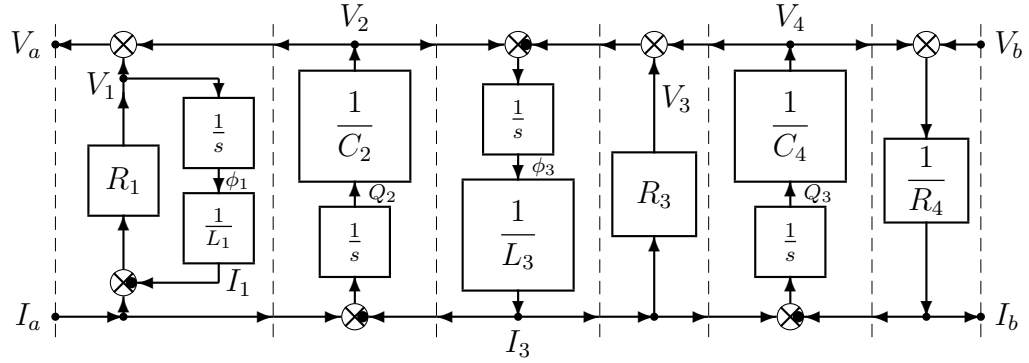
18. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$. Scrivere l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k)$:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B} d\sigma, \quad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

19. Si consideri il seguente circuito elettrico costituito dalle induttanze L_1 , L_3 , dalle capacità C_2 , C_3 e dalle resistenze R_1 , R_3 e R_4 . Sul sistema agiscono due ingressi: la corrente I_a e la tensione V_b . Le uscite del sistema sono: la tensione V_a e la corrente I_b .



Il modello P.O.G. del circuito elettrico assegnato è il seguente:



Sia $\mathbf{x} = [I_1 \ V_2 \ I_3 \ V_4]^T$ il vettore di stato, $\mathbf{u} = [I_a \ V_b]^T$ il vettore degli ingressi e $\mathbf{y} = [V_a \ I_b]^T$ il vettore delle uscite. Scrivere il corrispondente sistema dinamico $\bar{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}$ nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -R_3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \\ I_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_4} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_4} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

20. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e delle variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico *Meccanico Rotazionale*. Indicare inoltre la relazione costitutiva dei singoli elementi (sia nel caso generale non lineare che nel

caso lineare) e l'equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

	Simboli	Rel. Costitutiva	Caso Lineare	Eq. Differenziale
$\mathcal{D}_1$	J Inerzia			
q_1	P momento ang.	$P = \Phi_J(\omega)$	$P = J\omega$	$\frac{dP}{dt} = \tau$
v_1	ω velocità ang.			
$\mathcal{D}_2$	E Elasticità tors.			
q_2	θ spostamento ang.	$\theta = \Phi_E(\tau)$	$\theta = E\tau$	$\frac{d\theta}{dt} = \omega$
v_2	τ coppia			
$\mathcal{R}$	b Dissipatore	$\tau = \Phi_b(\omega)$	$\tau = b\omega$	

21. Sia dato il seguente sistema non-lineare, tempo-continuo, privo di ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^4 \\ \dot{x}_2 = (x_1 + \alpha)x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

È facile verificare che il punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema.

a) Linearizzare il sistema nell'intorno del punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ calcolando la matrice $\mathbf{A}$ del corrispondente sistema linearizzato:

La matrice $\mathbf{A}$ del sistema linearizzato ha la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & -4x_2^3 \\ x_2 & \alpha + x_1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}_{(x_1=0, x_2=0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

b) Studiare, al variare del parametro α , la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è il seguente:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = s(s - \alpha) = 0$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che: 1) per $\alpha > 0$ il sistema non lineare è instabile nell'intorno dell'origine; 2) per $\alpha \leq 0$ il criterio non implica nulla.

c) Nel caso $\alpha = 0$, studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dell'origine utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov e la seguente funzione definita positiva: $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^4$.

Se si calcola la derivata della funzione $V(\mathbf{x})$ lungo le traiettorie del sistema si ottiene:

$$\dot{V} = 2x_1(-x_1^3 - x_2^4) + 2x_2^3(x_1x_2 - x_2^3) = -2x_1^4 - 2x_2^6 < 0$$

Applicando il criterio "diretto" di Lyapunov è possibile affermare che nell'intorno $\mathbf{x}_0 = 0$ il sistema non lineare è asintoticamente stabile.

d) Si utilizzi il parametro α come ingresso del sistema: $u = \alpha$. Calcolare il controllo equivalente $u_{eq}(t)$ in grado di mantenere lo stato del sistema sulla superficie di sliding $\sigma = x_1 + x_2 = 0$.

Sol. Il controllo equivalente u_{eq} si determina imponendo $\dot{\sigma} = 0$:

$$\dot{\sigma} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0, \rightarrow -x_1^3 - x_2^4 + (x_1 + u_{eq})x_2 - x_2^3 = 0 \rightarrow u_{eq} = \frac{x_1^3 + x_2^4 + x_2^3}{x_2} - x_1$$

22. Come è possibile calcolare la matrice di transizione dello stato $\mathbf{A}^k$ di un sistema discreto lineare stazionario utilizzando le trasformate Zeta?

$$\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

23. Supponendo che la coppia di matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$ sia osservabile e utilizzando la formula duale di Ackerman, scrivere il vettore dei guadagni $\mathbf{l}$ di un osservatore asintotico dello stato che posiziona in $\lambda = -3$ tutti gli n autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}$:

$$\mathbf{l} = -p(\mathbf{A}) \underbrace{(\mathcal{O}^-)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = -p(\mathbf{A})\mathbf{q} \quad p(\lambda) = (\lambda + 3)^n$$

dove $\mathbf{q}$ è l'ultima colonna dell'inversa della matrice di osservabilità e dove $p(\mathbf{A})$ è la matrice che si ottiene dal polinomio arbitrario $p(\lambda)$ sostituendo in esso la matrice $\mathbf{A}$ al posto del parametro λ : $p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} + 3\mathbf{I})^n$.

24. Quali delle seguenti espressioni rappresentano modelli di regressione lineari nei parametri a_i :

- ☐ $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + 2a_1 a_2 x_3$
☒ $y = a_1 \cos(x_1) + a_2 \cos(x_1 + x_2)$
☐ $y = a_1 x_1 + 2 \cos(a_2 x_2)$
☒ $y = a_1 x_1 + a_2 e^{-3x_2}$

25. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-invariante:

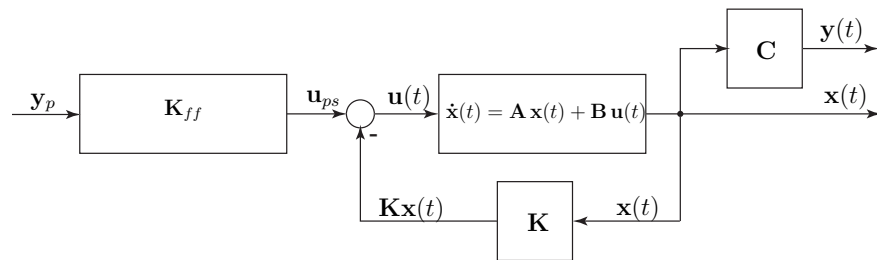
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

Volendo realizzare un controllore ottimo LQ, per l'inseguimento di un set-point $\mathbf{y}_p$ diverso dall'origine, l'espressione dell'indice di comportamento J risulta essere:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \{ [\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_p]^T \mathbf{Q} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_p] + [\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_p]^T \mathbf{R} [\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_p] \} dt$$

con $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$.

Inoltre lo schema di controllo complessivo (retroazione ottima dello stato e aggiunta di un riferimento)



dove: $\mathbf{K}_{ff} = -[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}$.