

**Teoria dei Sistemi e del Controllo**  
**Compito del 23 Dicembre 2015**  
**Domande ed esercizi**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info.    Elet.    Telec.

1. Scrivere la soluzione generale della seguente equazione alle differenze tempo-variante  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$ , essendo  $\mathbf{x}(h)$  lo stato all'istante iniziale  $h$ :

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, h)\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \Phi(k, j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{u}(j)$$

dove con  $\Phi(k, h)$  si è indicata la matrice di transizione dello stato.

2. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato*  $\Phi(t, t_0)$  nel caso di sistemi dinamici lineari tempo-continui e tempo-invarianti:

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$$

3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$  a partire dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}(0)$  all'istante  $t_0 = 0$ :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

4. Indicare quale simbolo viene utilizzato per descrivere "l'insieme degli stati raggiungibili all'istante  $t_1$  a partire dall'evento  $\{t_0, \mathbf{x}(t_0)\}$ ":

$$\mathcal{X}^+(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_0))$$

5. Calcolare la matrice di raggiungibilità  $\mathcal{R}^+$  e la matrice di osservabilità  $\mathcal{O}^-$  del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad -1 \quad 1] \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è:  raggiungibile?  non raggiungibile?  osservabile?  non osservabile?

6. La seguente rappresentazione simbolica:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases} \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$$

viene utilizzata per descrivere un sistema con le seguenti caratteristiche:

- un sistema dinamico;  un sistema tempo-continuo;  
 un sistema lineare;  un sistema a costanti concentrate;  
 un sistema tempo variante;  un sistema privo di ingressi;

7. Calcolare, in funzione della condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)]^T$ , l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & t e^{-t} & \frac{t^2}{2} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & t e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$$

8. Siano  $\mathbf{A}$  e  $\bar{\mathbf{A}}$  due matrici simili  $\mathbf{A} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}$ . La funzione di matrice  $\mathbf{A}^k$  gode della proprietà:

$\mathbf{A}^k = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{A}}^k \mathbf{T};$     
  $\mathbf{A}^k = \mathbf{T}^{-k} \bar{\mathbf{A}}^k \mathbf{T}^k;$     
  $\mathbf{A}^k = \mathbf{T} \bar{\mathbf{A}}^k \mathbf{T}^{-1};$     
  $\mathbf{A}^k = \mathbf{T}^k \bar{\mathbf{A}}^k \mathbf{T}^{-k};$

9. Scrivere la formula per calcolare la matrice di transizione dello stato  $e^{\mathbf{A}t}$  di un sistema lineare tempo-continuo utilizzando le trasformate di Laplace:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

10. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{x}.$$

a) Scrivere la formula da utilizzare per calcolare il punto di lavoro  $\mathbf{x}_0$  corrispondente ad un ingresso costante  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ :

$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_0.$$

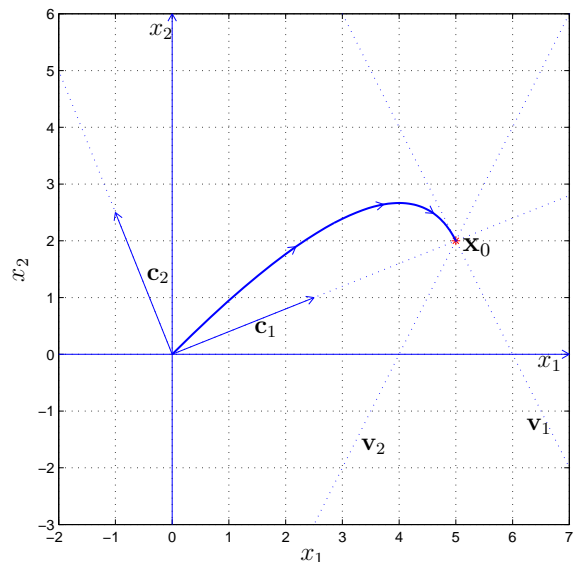
È facile verificare che per ingresso costante  $\mathbf{u}_0 = 16$  il punto di lavoro del sistema dato è  $\mathbf{x}_0 = [5, 2]^T$ . Gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$  sono:

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -8$$

e i corrispondenti autovettori sono:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b) Nel riquadro riportato a fianco disegnare qualitativamente la traiettoria del sistema dinamico  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}$  che si ottiene partendo dalla condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = 0$  e in presenza dell'ingresso costante  $\mathbf{u}_0 = 16$ .



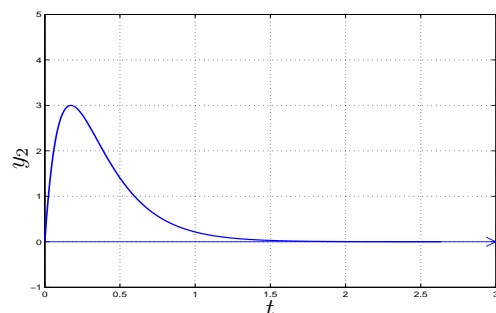
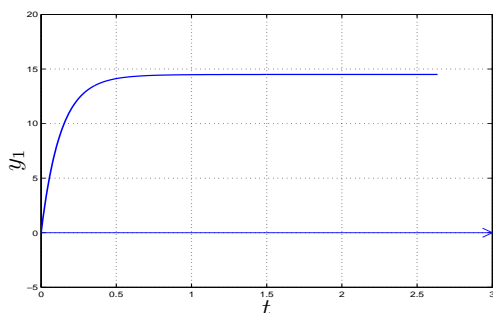
c) Indicare il tipo di traiettoria che caratterizza la risposta del sistema all'ingresso  $\mathbf{u}_0 = 16$ :

Nodo?    
 Nodo degenero?    
 Fuoco?    
 Sella?    
 Stabile?    
 Instabile?

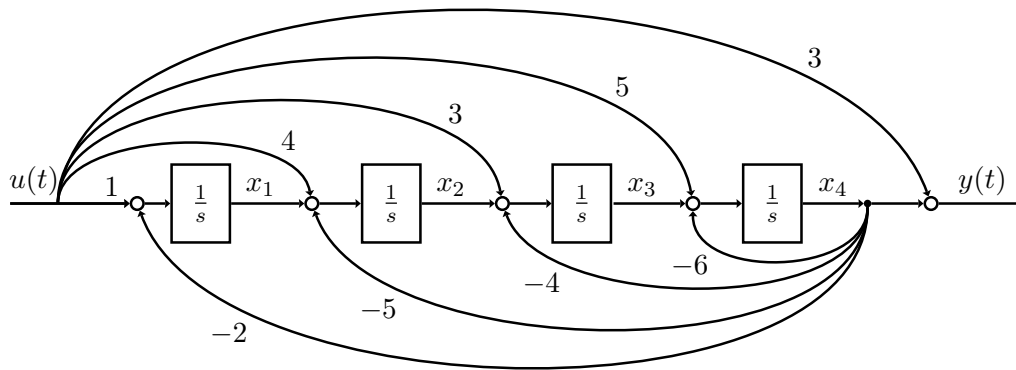
d) Calcolare il tempo di assestamento  $T_a$  e il periodo  $T_w$  dell'oscillazione della risposta  $\mathbf{x}(t)$ :

$$T_a = \frac{3}{|\lambda_1|} = \frac{3}{4} = 0.75 \text{ s}, \quad T_w = \infty.$$

e) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta temporale delle due uscite  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ :



11. Sia dato il seguente schema a blocchi:



Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s^3 + 3s^2 + 4s + 1}{s^4 + 6s^3 + 4s^2 + 5s + 2} + 3$$

Senza eseguire ulteriori calcoli è possibile affermare che il sistema dato:

- |                                  |                                |                                  |   |
|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|---|
| <input type="radio"/>            | è sicuramente stabile;         | <input checked="" type="radio"/> | è in forma canonica di osservabilità;   |
| <input checked="" type="radio"/> | è completamente osservabile;   | <input type="radio"/>            | è in forma standard di raggiungibilità; |
| <input type="radio"/>            | è completamente raggiungibile; | <input checked="" type="radio"/> | è un sistema ricostruibile;             |

12. Sia dato un sistema lineare  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{u}$  completamente raggiungibile e con un solo ingresso. Sia  $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$  il polinomio caratteristico della matrice  $\mathbf{A}$  e sia  $p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_1\lambda + d_0$  un polinomio monico scelto a piacere. Si fornisca l'espressione del vettore  $\mathbf{k}^T$  che mediante la retroazione statica  $\mathbf{u} = \mathbf{k}^T\mathbf{x}$  è in grado di far coincidere gli autovalori della matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T$  con le radici del polinomio  $p(\lambda)$ :

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{k}_c^T \left\{ \left[ \mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

dove  $\mathbf{k}_c^T = [ \alpha_0 - d_0, \alpha_1 - d_1, \dots, \alpha_{n-1} - d_{n-1} ]$ .

13. Sia dato il seguente sistema dinamico lineare discreto:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [ 1 \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} ] \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Pensando alla struttura a blocchi dei sistemi in forma standard è possibile affermare che:

- il sistema è in forma standard di osservabilità;
- il sistema è in forma standard di raggiungibilità;
- per questo sistema è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato;
- il sistema può essere stabilizzato utilizzando una retroazione statica dello stato;

14. Si consideri il problema di controllo punto a punto per un sistema lineare tempo-discreto. Tra le infinite soluzioni  $\mathbf{u}$  che fanno passare il sistema dallo stato iniziale  $\mathbf{x}(0)$  allo stato finale  $\mathbf{x}(k)$  nell'intervallo di tempo  $[0, k]$  indicare la soluzione  $\mathbf{u}$  che minimizza la norma euclidea:

$$\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T [\mathcal{R}_k^+ (\mathcal{R}_k^+)^T]^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)]$$

15. Enunciare la *Proprietà di separazione* del regolatore:

La sintesi del blocco di retroazione  $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$  e del blocco di stima  $(\mathbf{A} + \mathbf{LC})$  può essere fatta in modo indipendente:

$$\det[z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] = \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BK})] \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{LC})]$$

16. La formula di Ackerman per il calcolo del vettore dei guadagni  $\mathbf{l}$  di un osservatore asintotico dello stato che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}$  può essere utilizzata:

- solo se il sistema è raggiungibile;       solo se il sistema è osservabile;  
 solo per sistemi ad una sola uscita;       solo per sistemi ad un solo ingresso;  
 solo se il polinomio  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  è noto;       solo se il polinomio  $p(\lambda)$  è noto;

17. Dato il sistema lineare tempo-continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ , riportare la struttura di:

a) uno stimatore asintotico dello stato **in catena aperta** e l'evoluzione temporale dell'errore di stima  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$  che si ha a partire da un'errore di stima iniziale  $\mathbf{e}(0)$ :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{e}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{e}(0)$$

b) uno stimatore asintotico dello stato **in catena chiusa di ordine pieno** e l'evoluzione temporale dell'errore di stima  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$  che si ha a partire da un'errore iniziale  $\mathbf{e}(0)$ :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} + \mathbf{LC})t} \mathbf{e}(0)$$

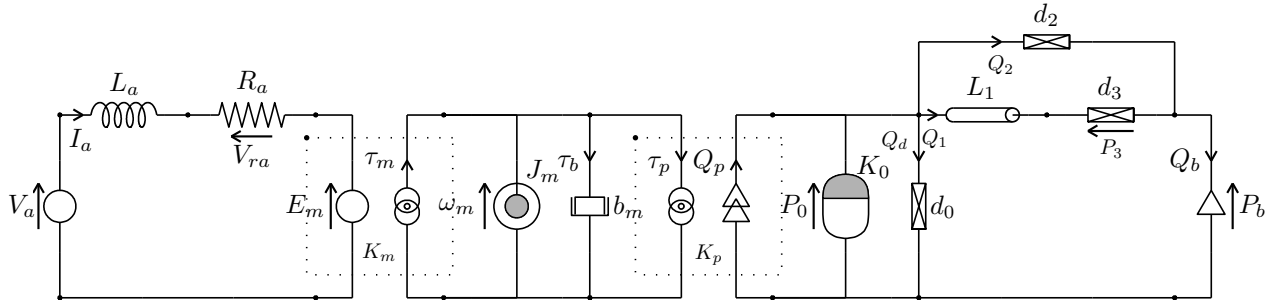
18. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e delle variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico *Meccanico Rotazionale*. Indicare inoltre la relazione costitutiva dei singoli elementi (sia nel caso generale non lineare che nel caso lineare) e l'equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

	Simboli	Rel. Costitutiva	Caso Lineare	Eq. Differenziale
$\mathcal{D}_1$	$J$ Inerzia			
$q_1$	$P$ momento ang.	$P = \Phi_J(\omega)$	$P = J\omega$	$\frac{dP}{dt} = \tau$
$v_1$	$\omega$ velocità ang.			
$\mathcal{D}_2$	$E$ Elasticità tors.			
$q_2$	$\theta$ spostamento ang.	$\theta = \Phi_E(\tau)$	$\theta = E\tau$	$\frac{d\theta}{dt} = \omega$
$v_2$	$\tau$ coppia			
$\mathcal{R}$	$b$ Dissipatore	$\tau = \Phi_b(\omega)$	$\tau = b\omega$	

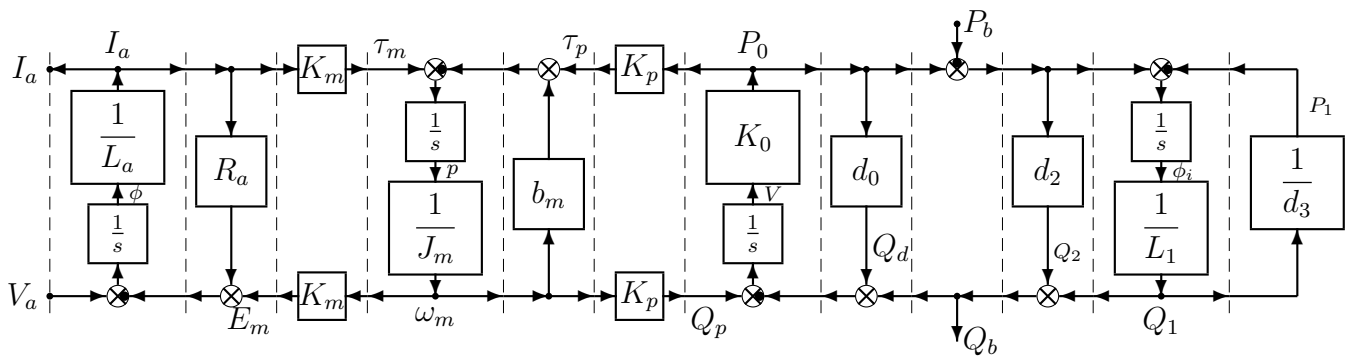
19. Quali delle seguenti funzioni  $V(x_1, x_2)$  sono definite positive nell'intorno del punto  $(1, 0)$ :

- $V(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ ;        $V(x_1, x_2) = (x_1^2 - 1)(x_2^2 + 1) + x_2^2$ ;  
  $V(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$ ;        $V(x_1, x_2) = (x_1^2 + 1)(x_2^2 - 1) + x_1^2$ ;

20. Si consideri il seguente sistema dinamico costituito da un motore elettrico che muove una pompa idraulica che a sua volta alimenta un carico idraulico:  $L_a, R_a, K_m, J_m$  e  $b_m$  sono i parametri del motore elettrico in corrente continua;  $K_p, K_0, L_1, d_0, d_2$  e  $d_3$  sono i parametri della pompa ad ingranaggi e del carico idraulico. Sul sistema agiscono due ingressi: la tensione  $V_a$  e la Pressione  $P_b$ . Le uscite del sistema sono: la corrente  $I_a$  e la portata volumetrica  $Q_b$ .



Il modello P.O.G. del sistema dinamico assegnato ha la seguente struttura:



Sia  $\mathbf{x} = [ I_a \ \omega_m \ P_0 \ Q_1 ]^T$  il vettore di stato,  $\mathbf{u} = [ V_a \ P_b ]^T$  il vettore degli ingressi e  $\mathbf{y} = [ I_a \ Q_b ]^T$  il vettore delle uscite. Scrivere il corrispondente sistema dinamico  $\bar{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}$  nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{P}_0 \\ \dot{Q}_1 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_a & -K_m & 0 & 0 \\ K_m & -b_m & -K_p & 0 \\ 0 & K_p & -d_0 - d_2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{d_3} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ \omega_m \\ P_0 \\ Q_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & d_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ P_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ Q_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d_2 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ P_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

21. Enunciare il criterio di stabilità di La Salle - Krasowskii nel caso di sistemi tempo continui.

Si consideri il sistema non lineare tempo continuo  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0)$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante  $\mathbf{u}_0$ .

Se in un intorno  $W$  del punto  $\mathbf{x}_0$  esiste una funzione  $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$  continua con derivate prime continue e definita positiva, se la funzione  $\dot{V}(\mathbf{x})$  è semidefinita negativa e se l'insieme  $\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in W | \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$  non contiene traiettorie perturbate del sistema dato, allora  $\mathbf{x}_0$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare dato.

22. Sia dato il seguente sistema non-lineare  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , tempo-continuo, privo di ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - \beta x_2 \end{cases}$$

a) Determinare, in funzione di  $\alpha$  e  $\beta$ , i 3 punti di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_2$  e  $\bar{\mathbf{x}}_3$  del sistema:

I punti di equilibrio del sistema si determinano imponendo  $\dot{x}_1 = 0$  e  $\dot{x}_2 = 0$ :

$$x_1(\alpha - x_2) = 0, \quad x_1^2 - \beta x_2 = 0.$$

Dalla prima relazione si ha  $x_1 = 0$  e  $x_2 = \alpha$ . Sostituendo nella seconda relazione si ottiene:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0), \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = (\sqrt{\alpha\beta}, \alpha), \quad \bar{\mathbf{x}}_3 = (-\sqrt{\alpha\beta}, \alpha).$$

b) Calcolare lo Jacobiano  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  del sistema non lineare  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ :

Lo Jacobiano del sistema non lineare è:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \alpha - x_2 & -x_1 \\ 2x_1 & -\beta \end{bmatrix}$$

c) Calcolare le matrici  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  e  $\mathbf{A}_3$  del sistema linearizzato nell'intorno dei punti di equilibrio:

Le matrici  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  e  $\mathbf{A}_3$  del sistema linearizzato hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{\alpha\beta} \\ 2\sqrt{\alpha\beta} & -\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\alpha\beta} \\ -2\sqrt{\alpha\beta} & -\beta \end{bmatrix}.$$

d) Studiare, al variare di  $\alpha$  e  $\beta$ , la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dei 3 punti di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_2$  e  $\bar{\mathbf{x}}_3$  utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}_1$  sono:

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\beta.$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare quanto segue. Quando  $\alpha < 0$  e  $\beta > 0$  il punto di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$  del sistema non lineare è asintoticamente stabile. Quando  $\alpha > 0$  oppure  $\beta < 0$  il punto di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}_1$  è instabile. In tutti gli altri casi il criterio non implica nulla. Il polinomio caratteristico delle matrici  $\mathbf{A}_2$  e  $\mathbf{A}_3$  è il seguente:

$$\Delta_{\mathbf{A}_2}(s) = \Delta_{\mathbf{A}_3}(s) = s^2 + \beta s + 2\alpha\beta = 0$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che i punti di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}_2$  e  $\bar{\mathbf{x}}_3$  del sistema non lineare: a) sono asintoticamente stabile se  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ ; b) sono instabili se  $\alpha < 0$  o  $\beta < 0$ ; il criterio non implica nulla per  $\beta = 0$  oppure per  $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$ .

e) Nel caso  $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$  studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno punto  $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$  utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov e la seguente funzione di Lyapunov:  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ . Eventualmente si utilizzi il criterio di La Salle - Krasowskii.

Nell'intorno punto  $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$  la funzione  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$  è definita positiva. Se si calcola la derivata della funzione  $V(\mathbf{x})$  lungo le traiettorie del sistema quando  $\alpha = 0$  si ottiene:

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1x_2) + 2x_2(x_1^2 - \beta x_2) = -2\beta x_2^2 \leq 0$$

Applicando il criterio "diretto" di Lyapunov è possibile affermare che nell'intorno del punto  $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$  il sistema non lineare è stabile. L'insieme  $\mathcal{N} = \{(x_1, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$  dei punti che annullano la funzione  $\dot{V}$  non contiene traiettorie perturbate del sistema per cui, in base al criterio di La Salle - Krasowskii, si può affermare che per  $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$  il sistema non lineare è asintoticamente stabile nell'intorno del punto  $\mathbf{x} = (0, 0)$ . Per  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  la funzione  $\dot{V}$  è nulla per cui il sistema non lineare è semplicemente stabile nell'intorno di  $\bar{\mathbf{x}}$ .