Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito A del 23 Dicembre 2010
Domande ed esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. ‖ Elet. ‖ Telec.

1. Indicare il numero e il tipo di parametri che caratterizzano la *funzione di transizione dello stato* di un generico sistema dinamico tempo-continuo:

$$x(t) = \psi(t,\, t_0, x(t_0), u(\cdot))$$

2. Scrivere la soluzione in forma chiusa dell'equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0)$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

3. La molteplicità *geometrica* di un autovalore λ della matrice $\mathbf{A}$

   ○ è la dimensione del blocco di Jordan $\mathbf{J}_\lambda$ associato all'autovalore λ;
   ⊗ è pari al numero di miniblocchi di Jordan associati all'autovalore λ;
   ○ è il grado di molteplicità di λ nel polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$;
   ⊗ è il numero di autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore λ;

4. Scrivere la matrici di trasferimento $\mathbf{H}(z)$ di un sistema lineare tempo-discreto in funzione delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ che caratterizzano il sistema lineare:

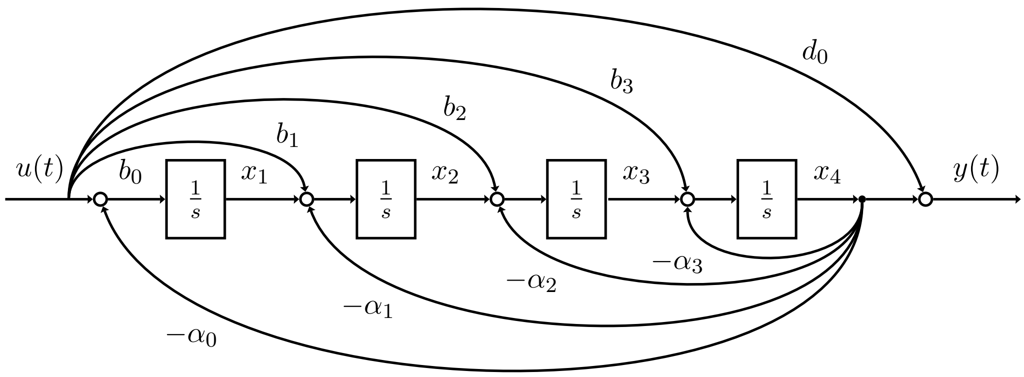
$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

5. Si consideri il problema di controllo punto a punto per un sistema lineare tempo-discreto. Tra le infinite soluzioni $\mathbf{u}$ che permettono far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(k)$ nell'intervallo di tempo $[0,\ k]$ indicare la struttura della soluzione $\mathbf{u}$ che minimizza la norma eucludea $||\mathbf{u}||$:

$$\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T[\mathcal{R}_k^+(\mathcal{R}_k^+)^T]^{-1}[\mathbf{x}(k)-\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)]$$

6. Disegnare lo schema a blocchi associato al seguente sistema tempo-continuo posto in forma canonica di osservabilità dove $\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) + d_0\, u(t) \end{cases}$$



7. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0),\ x_4(0)]^{\mathrm{T}}$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 2^k & k\,2^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k\,0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k & k\,(-2)^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix}$$

8. Sia dato un sistema lineare SISO del quarto ordine ($n = 4$), completamente raggiungibile, caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.
a) Indicare la struttura delle matrici $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{b}_c$ e $\mathbf{c}_c$ della corrispondente forma canonica di controllo. Sia $p(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_c = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

b) Indicare inoltre la struttura della matrice $\mathbf{T}$ che, unita alla trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}_c$, porta il sistema originario in forma canonica di controllo.

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \mathbf{A}^3\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla forma canonica di controllo riportata sopra:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_3 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

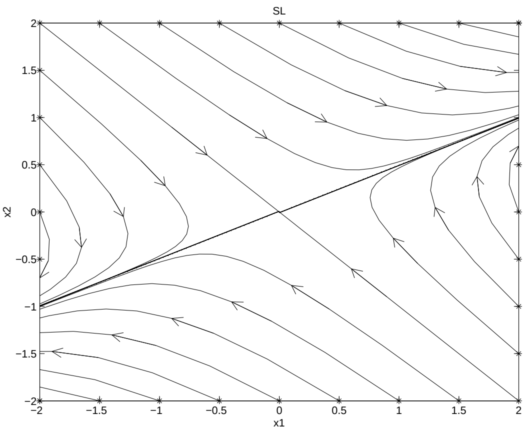
9. Considerato un sistema dinamico tempo continuo del secondo ordine caratterizzato da due autovalori reali $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, rispondere alle seguenti domande e indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie nell'intorno dell'origine:

⊗ gli autovettori del sistema $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono reali e distinti.

○ gli autovettori del sistema $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono complessi coniugati.

⊗ per $t \to \infty$ tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore $\mathbf{v}_1$.

○ per $t \to \infty$ tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi sull'autovettore $\mathbf{v}_2$.



Quale nome viene tipicamente utilizzato per indicare il tipo di traiettorie sopra indicato:

○ Nodo? ○ Fuoco? ⊗ Sella? ○ Degenere? ○ Stabile? ⊗ Instabile?

10. a) Si scriva la forma esplicita della formula di Ackermann che fornisce il vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori di un sistema retroazionato:

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = -\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{R}^+)^{-1} p(\mathbf{A})$$

b) Indicare la forma del polinomio desiderato $p(\lambda)$ e della matrice $p(\mathbf{A})$ nel caso $n = 4$ in cui si voglia posizionare due autovalori del sistema in $\lambda = -2$ e gli altri due autovalori in $\lambda = -1$.

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda + 1)^2, \qquad\qquad p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} + 2\mathbf{I})^2(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2$$

11. Dato il sistema lineare tempo-discreto $\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, riportare la struttura di:
a) uno stimatore asintotico dello stato *in catena aperta*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

b) uno stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k + 1) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) - \mathbf{L}\mathbf{y}(k)$$

c) l'evoluzione temporale degli errori di stima $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ che si hanno nei due casi precedenti a) e b) a partire da un'errore di stima iniziale $\mathbf{e}(0)$:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{e}(0), \qquad\qquad \mathbf{e}(k) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})^k\mathbf{e}(0)$$

12. Dato un sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$:

a) è possibile utilizzare un osservatore asintotico dello stato *in catena aperta* se e solo se:
il sistema è asintoticamente stabile

b) è possibile utilizzare un osservatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno* se e solo se:

la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile

c) è possibile utilizzare un osservatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine ridotto* se e solo se:

la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile

13. Indicare la struttura del sistema duale $\mathcal{S}_D$ associato ad un sistema dato $\mathcal{S} = (\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$:

$$\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^{\mathrm{T}})$$

14. Scrivere la forma della matrice $\mathbf{T}$ della trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$ che potra un sistema non completamente raggiungibile in forma standard di raggiungibilità:

$\mathbf{T} = \left[\ \mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2\ \right]$ dove $\mathrm{Im}\mathbf{T}_1 = \mathrm{Im}\mathcal{R}^+ = \mathcal{X}^+$ e $\mathbf{T}_2$ rende non singolare la matrice $\mathbf{T}$.

Indicare inoltre la struttura a blocchi delle matrici $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ che si ottengono.

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \left[\ \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2\ \right]$$

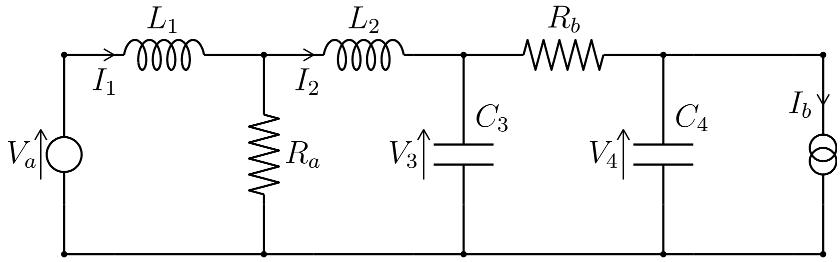
15. Scrivere la relazione necessaria e sufficiente che garantisce la completa controllabililità in k passi del sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$:

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \mathrm{Im}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)$$

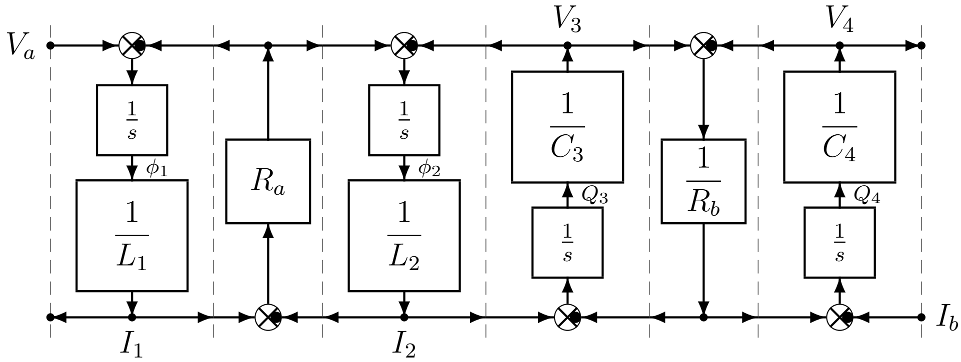
16. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$. Scrivere l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k)$:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \qquad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}\,d\sigma, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

17. Si consideri il seguente circuito elettrico costituito dalle induttanze L_1, L_2, dalle capacità C_3, C_3, dalle resistenze R_a, R_b, dalla tensione in ingresso V_a e dalla corrente in uscita I_b:



Il modello P.O.G. del circuito elettrico assegnato è il seguente:



Sia $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & V_3 & V_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore di stato (composto dalle variabili di potenza in uscita degli elementi dinamici) e sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} V_a & I_b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore d'ingresso. Scrivere il corrispondente sistema dinamico $\overline{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_a & R_a & 0 & 0 \\ R_a & -R_a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{R_b} & \frac{1}{R_b} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_b} & -\frac{1}{R_b} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

18. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e delle variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico *Idraulico*. Indicare inoltre la relazione costitutiva dei singoli elementi (sia nel caso generale non lineare che nel caso lineare)

e l'equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

	Simboli		Rel. Costititutiva	Caso Lineare	Eq. Differenzile
$\mathcal{D}_1$	C_I	Capacità idrau.			
q_1	V	volume	$V = \Phi_C(P)$	$V = C_I\, P$	$\dfrac{dV}{dt} = Q$
v_1	P	pressione			
$\mathcal{D}_2$	L_I	Induttanza idrau.			
q_2	ϕ_I	flusso idrau.	$\phi_I = \Phi_L(Q)$	$\phi_I = L_I\, Q$	$\dfrac{d\,\phi_I}{dt} = P$
v_2	Q	portata volumetrica			
$\mathcal{R}$	R	Resistenza idrau.	$P = \Phi_R(Q)$	$P = R_I\, Q$	

19. Sia dato il seguente sistema non–lineare, tempo–continuo, privo di ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_2 - x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

È facile verificare che il punto $(x_1,\, x_2) = (0,\, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema.

a) Linearizzare il sistema nell'intorno del punto $(x_1,\, x_2) = (0,\, 0)$ calcolando la matrice $\mathbf{A}$ del corrispondente sistema linearizzato:

La matrice $\mathbf{A}$ del sistema linearizzato ha la seguente struttura:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & \alpha - 3x_2^2 \end{array}\right]_{(x_1=0,\; x_2=0)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{array}\right]$$

b) Studiare, al variare del parametro α, la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $(x_1,\; x_2) = (0,\; 0)$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ è il seguente:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = s^2 - \alpha\, s + 1 = 0$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che: 1) per $\alpha > 0$ il sistema non lineare è instabile nell'intorno dell'origine; 2) per $\alpha < 0$ il sistema è asintoticamente stabile nell'intorno dell'origine; 3) per $\alpha = 0$ il criterio non implica nulla.

c) Nel caso $\alpha = 0$, studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dell'origine utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov e la seguente funzione definita positiva: $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$. Si utilizzi eventualmente anche il criterio di La Salle - Krasowskii.

Se si calcola la derivata della funzione $V(\mathbf{x})$ lungo le traiettorie del sistema si ottiene:

$$\dot{V} = 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - x_2^3) = -2x_2^4 \leq 0$$

Applicando il criterio "diretto" di Lyapunov è possibile affermare che nell'intorno $\mathbf{x}_0 = 0$ il sistema non lineare è stabile. L'insieme $\mathcal{N} = \{(x_1, 0), x_1 \in R\}$ dei punti che annullano la $\dot{V}$ non contiene traiettorie perturbate del sistema per cui, in base al criterio di La Salle - Krasowskii, si può affermare che per $\alpha = 0$ il sistema non lineare è asintoticamente stabile nell'intorno dell'origine.

d) Si utilizzi il parametro α come ingresso del sistema: $u = \alpha$. Calcolare il controllo equivalente $u_{eq}(t)$ in grado si mantenere lo stato del sistema sulla superficie di sliding $\sigma = x_1 + 2x_2 = 0$.

Sol. Il controllo equivalente u_{eq} si determina imponendo $\dot{\sigma} = 0$:

$$\dot{\sigma} = 0, \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0, \quad \rightarrow \quad x_2 + 2(u_{eq}x_2 - x_1 - x_2^3) = 0 \quad \rightarrow \quad u_{eq} = \frac{2x_1 + 2x_2^3 - x_2}{2x_2}$$

20. Sapendo che la relazione ingresso-uscita di un certo sistema pu essere ben approssimata con la seguente funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-3} + b_2 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}$$

e avendo a disposizione 10000 campioni del segnale di ingresso $u(k)$ e della corrispondente uscita $y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, 10000$, impostare il problema di identificazione dei parametri a_i, b_i. In particolare, scrivere l'espressione della matrice $\mathbf{\Phi}$ e del vettore $\mathbf{y}$ da cui si ricava il vettore dei parametri $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y}$. Scrivere i valori di a_i e b_i in funzione degli elementi di $\boldsymbol{\alpha}$.

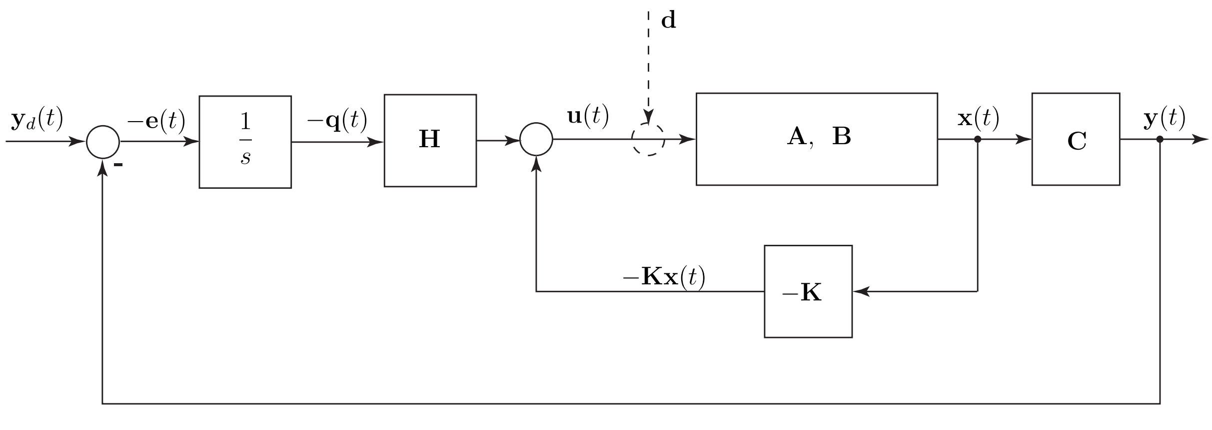
$$\mathbf{\Phi} = [\mathbf{\Phi}_1 \ \ \mathbf{\Phi}_2]$$

con

$$\mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} y(4) & y(3) & y(2) \\ y(5) & y(4) & y(3) \\ y(6) & y(5) & y(4) \\ \vdots & & \\ y(9999) & y(9998) & y(9997) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} u(2) & u(1) \\ u(3) & u(2) \\ u(4) & u(3) \\ \vdots & \\ u(9997) & u(9996) \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(5) \\ y(6) \\ y(7) \\ \vdots \\ y(100000) \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -\alpha_1 \qquad a_2 = -\alpha_2 \qquad a_3 = -\alpha_3 \qquad b_1 = \alpha_4 \qquad b_2 = \alpha_5$$

21. Dato il sistema dinamico tempo-continuo $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, riportare lo schema di controllo ottimo LQ con azione integrale. Come sono determinati i parametri che vi compaiono.
Lo schema di controllo richiesto risulta essere il seguente:



in cui i parametri $\mathbf{H}$ *e* $\mathbf{K}$ *possono essere trovati considerando il sistema dinamico aumentato:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e progettando (con tecniche viste del controllo ottimo LQ) una retroazione dello stato in grado di stabilizzare il sistema:

$$\mathbf{u}(t) = -\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix}$$