

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito A del 20 Dicembre 2012
Domande ed esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec.

1. Scrivere la soluzione generale della seguente equazione alle differenze tempo-variante $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$, essendo $\mathbf{x}(h)$ lo stato all'istante iniziale h :

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, h)\mathbf{x}(h) + \sum_{j=h}^{k-1} \Phi(k, j+1)\mathbf{B}(j)\mathbf{u}(j)$$

dove con $\Phi(k, h)$ si è indicata la matrice di transizione dello stato.

2. Scrivere l'andamento temporale della funzione di uscita $\mathbf{y}(t)$, soluzione dell'equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ e dell'equazione statica $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ all'istante $t_0 = 0$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

3. Calcolare la matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$ e la matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è: ☐ raggiungibile? ☒ non raggiungibile? ☒ osservabile? ☐ non osservabile?

Fornire una base $\mathcal{B}_R$ del sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e una base $\mathcal{B}_O$ del sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$:

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im}[\mathcal{B}_R] = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \text{Im}[\mathcal{B}_O] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. La seguente rappresentazione simbolica:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

viene utilizzata per descrivere un sistema con le seguenti caratteristiche:

- | | |
|---|---|
| ☒ un sistema lineare; | ☒ un sistema tempo-variante; |
| ☒ un sistema dinamico; | ☒ un sistema a costanti concentrate; |
| ☐ un sistema tempo-continuo; | ☐ un sistema autonomo; |

5. Si applichi la $\mathcal{Z}$ -trasformata alla seguente sistema discreto:

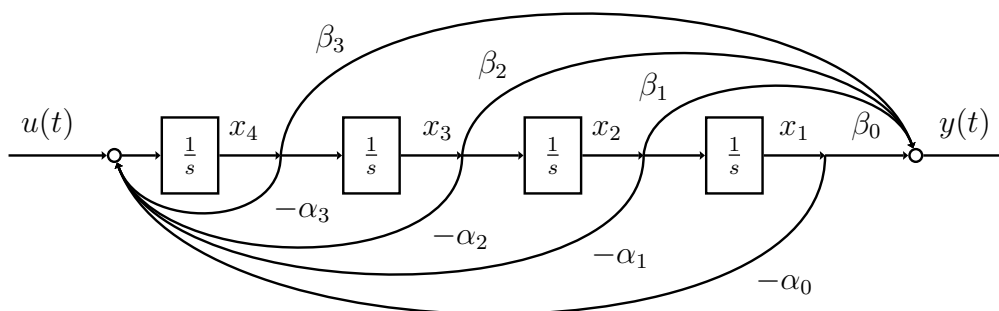
$$\mathcal{Z}[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)], \quad \mathcal{Z}[\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)]$$

e si fornisca l'espressione della trasformata $\mathbf{y}(z)$ del vettore di uscita $\mathbf{y}(k)$ in funzione dello stato iniziale $\mathbf{x}_0$ e della trasformata $\mathbf{u}(z)$ del segnale di ingresso $\mathbf{u}(k)$:

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\mathbf{x}_0 + [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{u}(z)$$

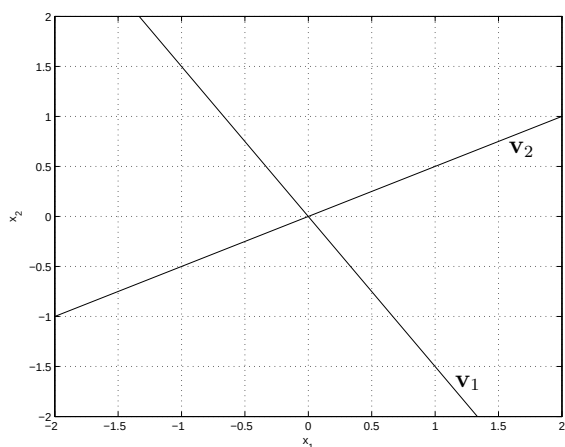
6. Disegnare lo schema a blocchi associato al seguente sistema tempo-continuo dove con $\mathbf{x}_c$ si è indicato il vettore $\mathbf{x}_c = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3] \mathbf{x}_c(t) \end{cases}$$



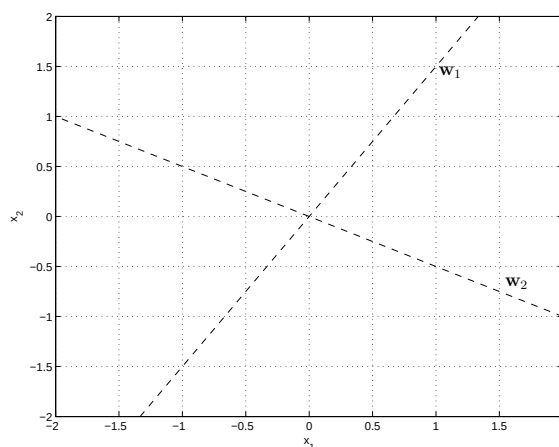
7. Disegnare qualitativamente le traiettorie di un sistema dinamico del secondo ordine $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ caratterizzato dagli autovalori λ_i dagli e autovettori $\mathbf{v}_i$ riportati nei due riquadri.

1) Autovalori: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$. I corrispondenti autovettori reali $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono mostrati in figura.



☒ Nodo? ☐ Fuoco? ☐ Sella?
☒ Stabile? ☐ Instabile?

2) Autovalori: $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3j$. Autovettori: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2j$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^*$. I vettori reali $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono mostrati in figura.



☐ Nodo? ☒ Fuoco? ☐ Sella?
☐ Stabile? ☒ Instabile?

8. Data la funzione di trasferimento $G(z)$, scrivere la struttura del corrispondente sistema dinamico in forma canonica di raggiungibilità indicando con $u(k)$ l'ingresso e con $y(k)$ l'uscita:

$$G(z) = \frac{z^4 + 6z^3 + 4z^2 + 7z + 4}{z^4 + 5z^3 + 2z^2 + 3z + 1} = 1 + \frac{z^3 + 2z^2 + 4z + 3}{z^4 + 5z^3 + 2z^2 + 3z + 1}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [3 \ 4 \ 2 \ 1] \mathbf{x}(k) + [1] u(k) \end{cases}$$

9. Si consideri il problema di controllo punto a punto per un sistema lineare tempo-continuo. Scrivere la condizione teorica che deve essere verificata affinché esista un controllo $\mathbf{u}$ che permetta di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(t)$ nell'intervallo di tempo $[0, t]$:

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$$

10. Calcolare la potenza k -esima del seguente miniblocco di Jordan:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\lambda^{k-3} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

11. Sia dato un sistema lineare SISO del quarto ordine, completamente osservabile, caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Sia $p(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$. Scrivere la struttura della matrice $\mathbf{P}$ che, unita alla trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_o$, porta il sistema originario in forma canonica di osservabilità.

$$\mathbf{P} = [(\mathcal{O}_c^-)^{-1}\mathcal{O}^-]^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^3 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

12. Dato il sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, riportare la struttura di:
a) uno stimatore asintotico dello stato **in catena aperta** e l'evoluzione temporale dell'errore di stima $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ che si ha a partire da un'errore di stima iniziale $\mathbf{e}(0)$:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{e}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{e}(0)$$

- b) uno stimatore asintotico dello stato **in catena chiusa di ordine pieno** e l'evoluzione temporale dell'errore di stima $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ che si ha a partire da un'errore iniziale $\mathbf{e}(0)$:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})t}\mathbf{e}(0)$$

13. Relativamente al sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$, scrivere in termini delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ una condizione necessaria e sufficiente per la completa ricostruibilità del sistema:

$$\mathcal{E}^- = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \subseteq \ker \mathbf{A}^n$$

14. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$. Scrivere l'espressione delle matrici $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k)$ con periodo T :

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}d\sigma, \quad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

Il corrispondente sistema a segnali campionati è raggiungibile se e solo se per ogni coppia λ_i , λ_j di autovalori distinti di $\mathbf{A}$ aventi la stessa parte reale si ha che:

$$\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} = k\omega_s \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

15. Scrivere la formula di Ackermann per il calcolo del vettore dei guadagni $\mathbf{l}$ di un osservatore asintotico dello stato che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}$:

$$\mathbf{l} = -p(\mathbf{A})(\mathcal{O}^-)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -p(\mathbf{A})\mathbf{q}$$

specificando anche il significato dei singoli termini. Tale formula può essere utilizzata

- ☐ solo per sistemi ad un solo ingresso;
- ☒ solo per sistemi completamente osservabili;
- ☐ per un qualunque sistema lineare tempo invariante;

16. Scrivere le matrici a blocchi $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ di un sistema in forma standard di raggiungibilità:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2]$$

17. Sia dato un sistema non-lineare, tempo discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$. I punti di equilibrio di questo sistema si ottengono:

- ☒ determinando i punti $\mathbf{x}_e(k)$ tali che $\mathbf{x}_e(k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e(k))$.
- ☐ risolvendo l'equazione $0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e(k))$ nell'incognita $\mathbf{x}_e(k)$.
- ☒ determinando i punti dello spazio degli stati per cui vale la relazione $\mathbf{x}_e(k+1) = \mathbf{x}_e(k)$.

18. Indicare la struttura del sistema duale $\mathcal{S}_D$ associato ad un sistema dato $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$:

$$\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$$

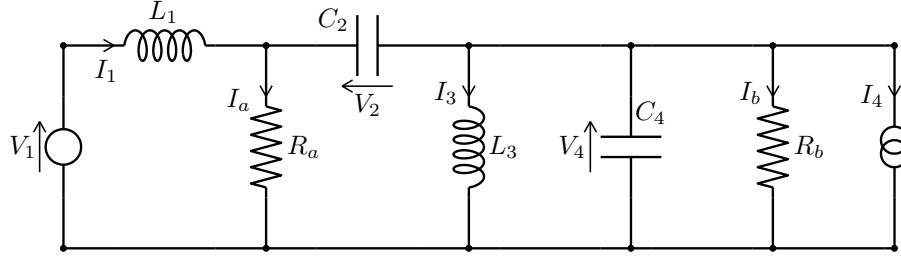
19. Si consideri un sistema non lineare tempo continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio del sistema per ingresso costante $\mathbf{u}_0$. Indicare come si calcolano le matrici del sistema linearizzato:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}$$

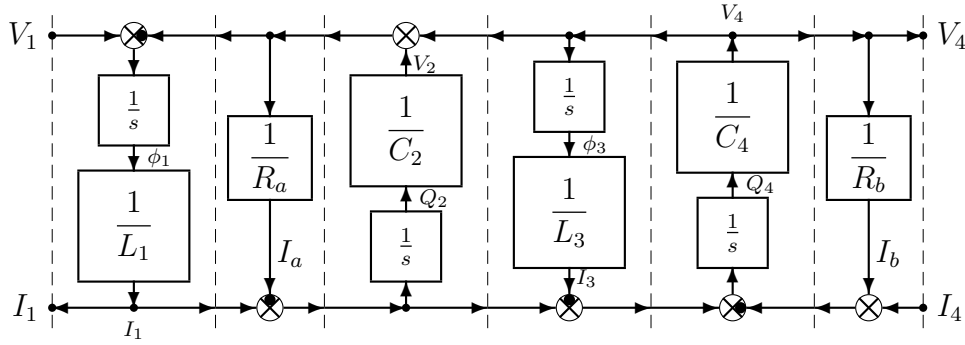
20. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e delle variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico *Meccanico Rotazionale*. Indicare inoltre la relazione costitutiva dei singoli elementi (sia nel caso generale non lineare che nel caso lineare) e l'equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

	Simboli	Rel. Costitutiva	Caso Lineare	Eq. Differenziale
$\mathcal{D}_1$	J Inerzia			
q_1	P momento ang.	$P = \Phi_J(\omega)$	$P = J\omega$	$\frac{dP}{dt} = \tau$
v_1	ω velocità ang.			
$\mathcal{D}_2$	E Elasticità tors.			
q_2	θ spostamento ang.	$\theta = \Phi_E(\tau)$	$\theta = E\tau$	$\frac{d\theta}{dt} = \omega$
v_2	τ coppia			
$\mathcal{R}$	b Dissipatore	$\tau = \Phi_b(\omega)$	$\tau = b\omega$	

21. Si consideri il seguente circuito elettrico costituito dalle induttanze L_1 , L_3 , dalle capacità C_2 , C_4 e dalle resistenze R_a e R_b . Sul sistema agiscono due ingressi: la tensione V_1 e la corrente I_4 . Le uscite del sistema sono: la corrente I_1 e la tensione V_4 .



Il modello P.O.G. del circuito elettrico assegnato ha la seguente struttura:



Sia $\mathbf{x} = [I_1 \ V_2 \ I_3 \ V_4]^T$ il vettore di stato, $\mathbf{u} = [V_1 \ I_4]^T$ il vettore degli ingressi e $\mathbf{y} = [I_1 \ V_4]^T$ il vettore delle uscite. Scrivere il corrispondente sistema dinamico $\bar{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}$ nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{R_a} & 0 & -\frac{1}{R_a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{R_a} & -1 & -\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \\ I_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ I_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ I_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

22. Enunciare il criterio di stabilità di La Salle - Krasowskii nel caso di sistemi tempo discreti.

Si consideri il sistema non lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_0)$ e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $\mathbf{u}_0$.

Se in un intorno W del punto $\mathbf{x}_0$ esiste una funzione continua $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ definita positiva, se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa e se l'insieme $\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in W | \Delta V(\mathbf{x}) = 0\}$ non contiene traiettorie perturbate del sistema dato, allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

23. Sia dato il seguente sistema non-lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$, tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2^2 - x_1^3 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_2 - x_1^3 x_2 + u \end{cases}$$

Posto $u = 0$, è facile verificare che l'origine $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema.

a) Calcolare la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}$ e il vettore $\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial u}$ del sistema non lineare:

La matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e il vettore $\mathbf{b}$ hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 1 & 2x_2 \\ -3x_1^3 x_2 & \alpha - x_1^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Calcolare la matrice $\mathbf{A}_1$ e il vettore $\mathbf{b}_1$ del sistema linearizzato nel punto $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$, $u = 0$:

La matrice $\mathbf{A}_1$ e il vettore $\mathbf{b}_1$ del sistema linearizzato hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

c) Studiare, al variare del parametro α , la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$, $u = 0$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice $\mathbf{A}_1$ sono:

$$\Delta_{\mathbf{A}_1}(s) = (s + 1)(s - \alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad s = -1, \quad s = \alpha$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che per $\alpha > 0$ il punto di equilibrio $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ del sistema non lineare è instabile, mentre per $\alpha < 0$ il punto di equilibrio $\mathbf{x}_1$ è asintoticamente stabile. Per $\alpha = 0$ il criterio non implica nulla.

d) Nel caso $\alpha = 0$ e $u = 0$, studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dell'origine $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov e la funzione: $V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^2$. Si utilizzi eventualmente anche il criterio di La Salle - Krasowskii.

Nell'intorno dell'origine la funzione $V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^2$ è sicuramente definita positiva. La derivata della funzione $V(\mathbf{x})$ lungo le traiettorie del sistema per $\alpha = 0$ e $u = 0$ è la seguente:

$$\dot{V} = 4x_1^3(x_2^2 - x_1^3 - x_1) + 4x_2(-x_1^3 x_2) = -4x_1^6 - 4x_1^4 \leq 0$$

La funzione $\dot{V}$ è semidefinita negativa per cui, in base al criterio "diretto" di Lyapunov, è possibile affermare che nell'intorno dell'origine il sistema non lineare è semplicemente stabile. L'insieme $\mathcal{N} = \{(0, x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$ dei punti che annullano la $\dot{V}$ non contiene traiettorie perturbate del sistema per cui, in base al criterio di La Salle - Krasowskii, si può affermare che per $\alpha = 0$ il sistema non lineare è asintoticamente stabile nell'intorno dell'origine.

e) Posto $\alpha = 0$ e $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$, determinare per quali valori dei parametri k_1 e k_2 il sistema linearizzato nell'intorno del punto $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ è asintoticamente stabile.

Posto $\mathbf{k}^T = [k_1 \ k_2]$, la matrice $\mathbf{A}_k$ del sistema linearizzato nell'intorno dell'origine ha la seguente forma:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

Il sistema linearizzato è asintoticamente stabile per $k_2 < 0$ e $\forall k_1$.