

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito del 11 Febbraio 2016
Domande ed esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec.

1. Scrivere l'andamento temporale della funzione di uscita $\mathbf{y}(k)$, soluzione dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ e dell'equazione statica $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(h)$ all'istante h :

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-h} \mathbf{x}(h) + \mathbf{C} \sum_{j=h}^{k-1} \mathbf{A}^{k-j-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(j) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k)$$

2. Scrivere la soluzione in forma chiusa dell'equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0)$ all'istante $t = t_0$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

3. Indicare che cosa rappresenta il simbolo $\mathcal{E}^+(t_0, t_1, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{y}(\cdot))$:

È l'insieme degli stati finali $\mathbf{x}(t_1)$ compatibili con le funzioni di ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ ed uscita $\mathbf{y}(\cdot)$ nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$.

4. Descrivere a parole che cosa rappresenta, per sistemi lineari discreti, il simbolo $\mathcal{R}^+(k)$:

$\mathcal{R}^+(k)$ è l'insieme degli stati raggiungibili in k passi, cioè degli stati che si possono raggiungere dall'origine $\mathbf{x}(0) = 0$ in k passi considerando tutte le possibili successioni di ingresso $\mathbf{u}(\tau)$.

5. Calcolare la matrice di raggiungibilità \mathcal{R}^+ e la matrice di osservabilità \mathcal{O}^- del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 1 \ 0] \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Il sistema è: raggiungibile? non raggiungibile? osservabile? non osservabile?

Fornire una base \mathcal{B}_R del sottospazio raggiungibile \mathcal{X}^+ e una base \mathcal{B}_O del sottospazio non osservabile \mathcal{E}^- :

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im} [\mathcal{B}_R] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \text{Im} [\mathcal{B}_O] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = [x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}]^T$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-continuo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t & 0 & 0 \\ -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{bmatrix}$$

12. Uno stimatore asintotico dello stato “in catena chiusa” può essere utilizzato
- se il sistema è osservabile;
 - se il sistema è asintoticamente stabile;
 - se la parte instabile del sistema è osservabile;
 - anche se la parte non osservabile del sistema è instabile;
13. Un sistema $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ può essere “stabilizzato” mediante retroazione statica dello stato
- anche se il sistema ha tutti i poli instabili;
 - se e solo se il sistema è completamente raggiungibile;
 - se e solo se la parte instabile del sistema è raggiungibile;
 - se e solo se la parte raggiungibile del sistema è instabile;
14. La formula di Ackermann per il calcolo del vettore \mathbf{k}^T che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori del sistema retroazionato e può essere utilizzata
- solo per sistemi lineari;
 - anche per sistemi instabili;
 - anche per sistema non raggiungibili;
 - anche per sistemi a più ingressi;

Si fornisca inoltre la descrizione esplicita della formula di Ackermann e del polinomio desiderato $p(\lambda)$ nel caso in cui si voglia posizionare tutti gli n autovalori del sistema nello stesso punto λ_0 imponendo un tempo di assestamento $T_a = 0.6$:

$$\mathbf{k}^T = - \left[0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right] (\mathcal{R}^+)^{-1} p(\mathbf{A}), \quad p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n, \quad \lambda_0 = -\frac{3}{T_a} = -5$$

15. Scrivere le matrici a blocchi $\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ di un sistema in forma standard di raggiungibilità:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} \quad \overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2]$$

16. Dato il sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, riportare la struttura di uno stimatore asintotico dello stato **in catena chiusa di ordine pieno** e l'evoluzione temporale dell'errore di stima $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ che si ha a partire da un'errore iniziale $\mathbf{e}(0)$:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})t} \mathbf{e}(0)$$

17. Scrivere la relazione necessaria e sufficiente che garantisce la completa controllabilità in k passi del sistema lineare discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$:

$$\text{Im}\mathbf{A}^k \subseteq \text{Im}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] = \mathcal{X}^+(k)$$

18. Sia data la seguente **equazione alle differenze** non lineare:

$$y(k+3) + 2y(k) \sin y(k+2) + 3y(k+2)y(k+1) + 7 \cos y(k) = u(k).$$

Scelto $\mathbf{x} = [x_1(k) \quad x_2(k) \quad x_3(k)]^T = [y(k) \quad y(k+1) \quad y(k+2)]^T$ come vettore di stato, esprimere l'equazione alle differenze non lineare nello spazio degli stati:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = -2x_1(k) \sin x_3(k) - 3x_3(k)x_2(k) - 7 \cos x_1(k) + u(k) \end{cases}$$

19. Sia dato un sistema lineare SISO completamente raggiungibile caratterizzato dalle matrici \mathbf{A} , \mathbf{b} e \mathbf{c} . Indicare la struttura della matrice \mathbf{T} che (utilizzando la trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}_c$) porta il sistema originario in forma canonica di controllo.

$$\mathbf{T} = \mathcal{R}^+(\mathcal{R}_c^+)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

20. Sia \mathcal{S}_D il sistema duale del sistema **tempo continuo** $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$:

- Se \mathcal{S} è controllabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è ricostruibile; Se \mathcal{S} è raggiungibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è osservabile;
 Se \mathcal{S} è osservabile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è ricostruibile; Se \mathcal{S} è ricostruibile $\Rightarrow \mathcal{S}_D$ è controllabile;

21. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$. Scrivere l'espressione delle matrici \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k)$ con periodo T :

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma}\mathbf{B}d\sigma, \quad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

22. Nel caso del sistema lineare $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, la funzione di ingresso $u(\tau)$, con $\tau \in [0, t_1]$, che consente di far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(t_1)$:

- esiste se $\mathbf{x}(t_1) \in \mathcal{X}^+$; esiste se $\mathbf{x}(t_1) - e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$;
 esiste se il sistema è raggiungibile; esiste se $\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{A}^{t_1}\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X}^+$;

23. Enunciare il criterio diretto di instabilità di Lyapunov nel caso di sistemi tempo discreti.

Si consideri il sistema non lineare $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_0)$ e sia \mathbf{x}_0 un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante \mathbf{u}_0 . Se:

- 1) in un intorno W di \mathbf{x}_0 esiste una funzione $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ continua e nulla in \mathbf{x}_0 ;
- 2) il punto \mathbf{x}_0 è punto di accumulazione per l'insieme dei punti $\mathbf{x} \in W$ in cui è $V(\mathbf{x}) > 0$;
- 3) $\Delta V(\mathbf{x})$ è *definita positiva* in W ;

allora \mathbf{x}_0 è un punto di equilibrio *instabile*.

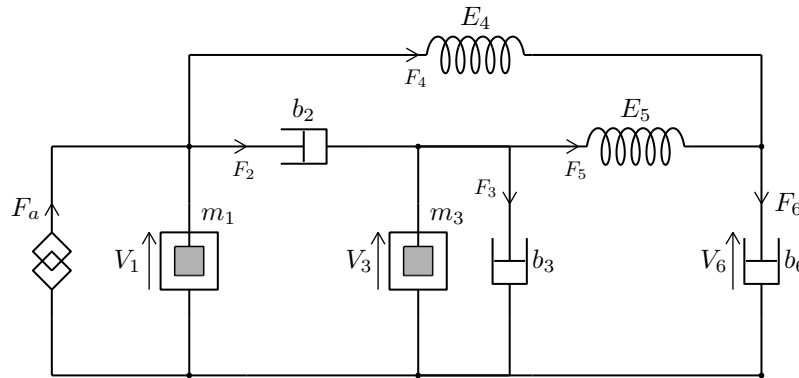
24. Sia dato un sistema non-lineare, tempo discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$. I punti di equilibrio di questo sistema si ottengono:

- determinando i punti \mathbf{x}_e tali per cui $\mathbf{x}_e = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e)$.
 determinando i punti \mathbf{x}_e tali per cui $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = 0$.
 determinando i punti $\mathbf{x}_e(k)$ dello spazio degli stati tali per cui $\mathbf{x}_e(k+1) = \mathbf{x}_e(k)$.

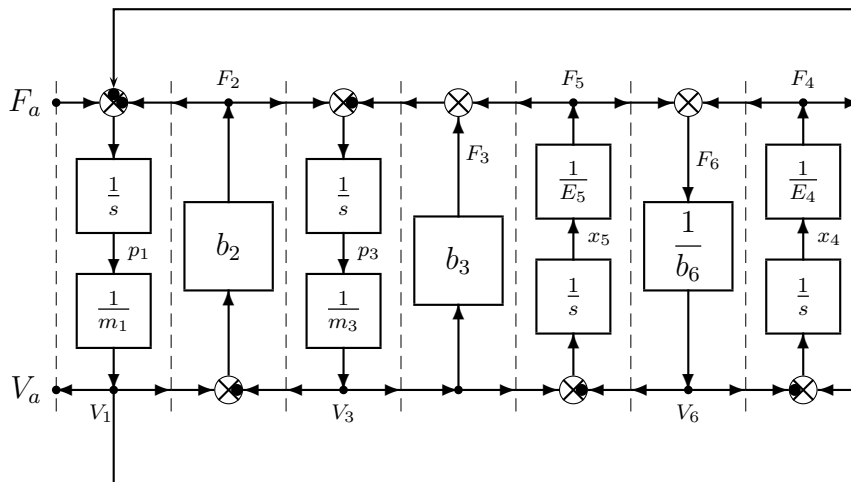
25. Indicare le variabili energia q_1, q_2 e le variabili di potenza in uscita v_1 e v_2 degli elementi dinamici \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 che caratterizzano i vari ambiti energetici:

	Elettrico	Meccanico. Tras.	Meccanico Rot.	Idraulico
\mathcal{D}_1	C Capacità	M Massa	J Inerzia	C_I Capacità idr.
q_1	Q Carica	p Quantità di moto	p Momento angolare	V Volume
v_1	V Tensione	v Velocità	ω Velocità angolare	P Pressione
\mathcal{D}_2	L Induttanza	E Molla	E Molla torsionale	L_I Induttanza idr.
q_2	ϕ Flusso	x Spostamento	θ Spostamento ang.	ϕ_I Flusso idr.
v_2	I Corrente	F Forza	τ Coppia	Q Portata Vol.

26. Si consideri il seguente sistema meccanico costituito dalle masse m_1 , m_3 , dalle elasticità E_4 , E_5 e dai dissipatori b_2 , b_3 e b_6 . Sul sistema agisce un solo ingresso: la forza F_a . Le uscite del sistema sono: velocità $V_a = V_1$ e la forza $F_b = F_4 + F_5$.



Il modello P.O.G. del circuito meccanico assegnato ha la seguente struttura:



Sia $\mathbf{x} = [V_1 \ V_3 \ F_5 \ F_4]^T$ il vettore di stato, $\mathbf{u} = F_a$ il vettore degli ingressi e $\mathbf{y} = [V_a \ F_6]^T$ il vettore delle uscite. Scrivere il corrispondente sistema dinamico $\bar{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}$ nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{F}_5 \\ \dot{F}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -b_2 & b_2 & 0 & -1 \\ b_2 & -b_2 - b_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{b_6} & -\frac{1}{b_6} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{b_6} & -\frac{1}{b_6} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ F_5 \\ F_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}} \underbrace{[F_a]}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ F_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}} \underbrace{[F_a]}_{\mathbf{u}}$$

27. Quali delle seguenti funzioni $V(x_1, x_2)$ sono definite positive nell'intorno del punto $(1, 1)$:

⊗ $V(x_1, x_2) = |x_1 - 1|x_2 + |x_2 - 1|x_1$; ⊗ $V(x_1, x_2) = |x_1 - 1| + |x_2 - 1|$;
 ○ $V(x_1, x_2) = (|x_1| - 1)x_2 + (|x_2| - 1)x_1$; ○ $V(x_1, x_2) = (|x_1| - 1) + (|x_2| - 1)$;

28. Sia dato il seguente sistema non-lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$, tempo-continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2^4 - x_1^3 - 2x_1 \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_2 - x_1^3 x_2^3 + u \end{cases}$$

Posto $u = 0$, è facile verificare che l'origine $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema.

a) Calcolare la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}}$ e il vettore $\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial u}$ del sistema non lineare:

La matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e il vettore \mathbf{b} hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -3x_1^2 - 2 & 4x_2^3 \\ -3x_1^2 x_2^3 & \alpha - 3x_1^3 x_2^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Calcolare la matrice \mathbf{A}_1 e il vettore \mathbf{b}_1 del sistema linearizzato nel punto $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$, $u = 0$:

La matrice \mathbf{A}_1 e il vettore \mathbf{b}_1 del sistema linearizzato hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

c) Studiare, al variare del parametro α , la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$, $u = 0$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Il polinomio caratteristico e gli autovalori della matrice \mathbf{A}_1 sono:

$$\Delta_{\mathbf{A}_1}(s) = (s + 2)(s - \alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad s = -1, \quad s = \alpha$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che per $\alpha > 0$ il punto di equilibrio $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ del sistema non lineare è instabile, mentre per $\alpha < 0$ il punto di equilibrio \mathbf{x}_1 è asintoticamente stabile. Per $\alpha = 0$ il criterio non implica nulla.

d) Nel caso $\alpha = 0$ e $u = 0$, studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dell'origine $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov e la funzione: $V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^2$. Si utilizzi eventualmente anche il criterio di La Salle - Krasowskii.

Nell'intorno dell'origine la funzione $V(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^2$ è sicuramente definita positiva. La derivata della funzione $V(\mathbf{x})$ lungo le traiettorie del sistema per $\alpha = 0$ e $u = 0$ è la seguente:

$$\dot{V} = 4x_1^3(x_2^4 - x_1^3 - 2x_1) + 4x_2(-x_1^3 x_2^3) = -4x_1^6 - 8x_1^4 \leq 0$$

La funzione \dot{V} è semidefinita negativa per cui, in base al criterio "diretto" di Lyapunov, è possibile affermare che nell'intorno dell'origine il sistema non lineare è semplicemente stabile. L'insieme $\mathcal{N} = \{(0, x_2), x_2 \in R\}$ dei punti che annullano la \dot{V} non contiene traiettorie perturbate del sistema per cui, in base al criterio di La Salle - Krasowskii, si può affermare che per $\alpha = 0$ il sistema non lineare è asintoticamente stabile nell'intorno dell'origine.

e) Posto $\alpha = 0$ e $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$, determinare per quali valori dei parametri k_1 e k_2 il sistema linearizzato nell'intorno del punto $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ è asintoticamente stabile.

Posto $\mathbf{k}^T = [k_1 \ k_2]$, la matrice \mathbf{A}_k del sistema linearizzato nell'intorno dell'origine ha la seguente forma:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

Il sistema linearizzato è asintoticamente stabile per $k_2 < 0$ e $\forall k_1$.