

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito del 11 Gennaio 2016
Domande ed esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	
C.L.:	Info. Elet. Telec.

1. Scrivere la soluzione generale dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ all'istante $h = 0$:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-j-1)} \mathbf{B}\mathbf{u}(j)$$

2. Scrivere l'andamento temporale della funzione di uscita $\mathbf{y}(t)$, soluzione dell'equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ e dell'equazione statica $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ all'istante $t_0 = 0$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

3. Un sistema dinamico caratterizzato dalla funzione di stato $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$

- è un sistema dinamico; è un sistema lineare;
 è un sistema tempo-continuo; è un sistema tempo-invariante;

4. Calcolare la matrice di raggiungibilità \mathcal{R}^+ e la matrice di osservabilità \mathcal{O}^- del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è: raggiungibile? non raggiungibile? osservabile? non osservabile?

Fornire una base \mathcal{B}_R del sottospazio raggiungibile \mathcal{X}^+ e una base \mathcal{B}_O del sottospazio non osservabile \mathcal{E}^- :

$$\mathcal{X}^+ = \text{Im}[\mathcal{B}_R] = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}^- = \text{Im}[\mathcal{B}_O] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Sia dato un sistema lineare tempo discreto: $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ e $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$. Fornire l'espressione $\mathbf{y}(k)$ della sola *evoluzione libera* dell'uscita del sistema a partire dalla condizione iniziale \mathbf{x}_0 . Indicare inoltre l'espressione della trasformata $\mathbf{y}(z)$ del vettore $\mathbf{y}(k)$:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z \mathbf{x}_0$$

6. Calcolare, in funzione della condizione iniziale $\mathbf{x}_0 = [x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}]^T$, l'evoluzione libera del seguente sistema autonomo tempo-discreto:

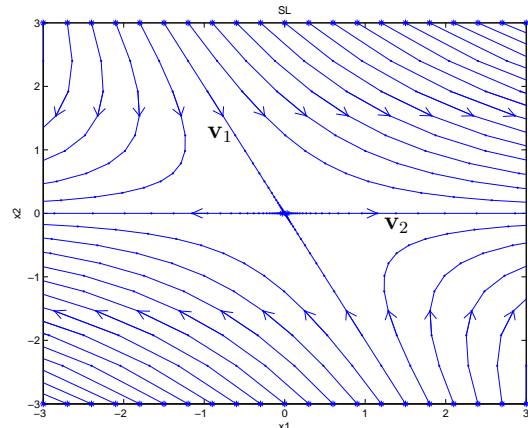
$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \\ 0 & 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{bmatrix}$$

7. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$. Scrivere l'espressione delle matrici \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} che caratterizzano il corrispondente sistema a segnali campionati $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}u(k)$, $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{x}(k)$:

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B} d\sigma, \quad \mathbf{H} = \mathbf{C}$$

8. Considerato un sistema dinamico **tempo-discreto** $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)$ del secondo ordine caratterizzato da due autovalori reali distinti $\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 1.2$, rispondere alle domande e indicare qual è l'andamento qualitativo delle traiettorie nell'intorno dell'origine:

- gli autovettori del sistema \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono reali e distinti.
- gli autovettori del sistema \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono traiettorie rettilinee del sistema.
- per $t \rightarrow \infty$ tutte le traiettorie tendono ad appiattirsi su uno dei due autovettori.
- per $t \rightarrow \infty$ tutte le traiettorie tendono a zero.

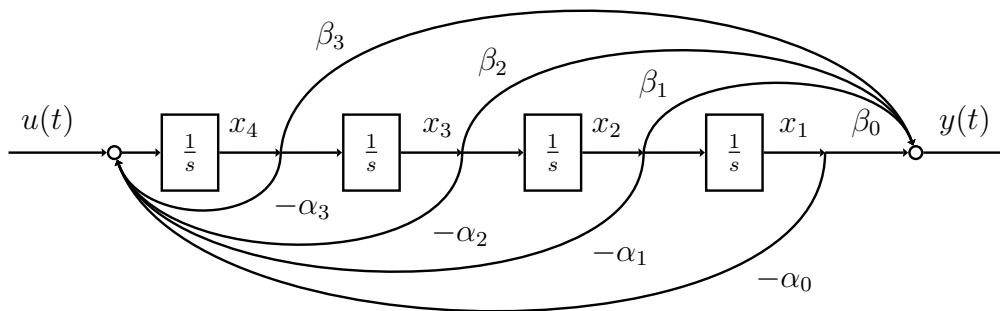


Quale nome viene tipicamente utilizzato per indicare il tipo di traiettorie sopra indicato:

- Nodo? Fuoco? Sella? | Degenera? Stabile? Instabile?

9. Disegnare lo schema a blocchi associato al seguente sistema tempo-continuo dove con \mathbf{x}_c si è indicato il vettore $\mathbf{x}_c = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3] \mathbf{x}_c(t) \end{cases}$$



10. Dato il sistema dinamico sotto riportato, scrivere la funzione di trasferimento $G(z)$ che lega la trasformata $U(z)$ dell'ingresso $u(k)$ alla trasformata $Y(z)$ dell'uscita $y(k)$:

$$G(z) = \frac{2z^3 + 3z^2 + 5z + 1}{z^4 + 4z^3 + 3z^2 + z + 5} + 7 \quad \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}(k) + [7] u(k) \end{cases}$$

11. Si consideri il problema di controllo punto a punto per un sistema lineare tempo-discreto. Tra le infinite soluzioni \mathbf{u} che fanno passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(k)$ nell'intervallo di tempo $[0, k]$ indicare la soluzione \mathbf{u} che minimizza la norma euclidea:

$$\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T [\mathcal{R}_k^+ (\mathcal{R}_k^+)^T]^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)]$$

12. Sia dato un sistema (\mathbf{A}, \mathbf{b}) completamente raggiungibile. Il corrispondente sistema a dati campionati (essendo T il periodo di campionamento) è completamente raggiungibile se e solo se per ogni coppia λ_i, λ_j di autovalori distinti di \mathbf{A} aventi la stessa parte reale, vale la relazione:

$$\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

13. Sia dato il seguente sistema non lineare di equazioni differenziali nello spazio degli stati:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 \sin^2 x_3 + 2x_2^3 - 5x_1 x_3^2 + u(t) \end{cases}$$

Posto $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [y(t) \ \dot{y}(t) \ \ddot{y}(t)]^T$, scrivere la corrispondente equazione differenziale non lineare del terzo ordine che lega l'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$:

$$\ddot{y}(t) + 3y(t) \sin^2 \dot{y}(t) - 2\dot{y}^3(t) + 5y(t)\dot{y}^2(t) = u(t).$$

14. Scrivere come si determina la matrice \mathbf{P}^{-1} della trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$ che porta un sistema non completamente osservabile in forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \text{Im} \mathbf{P}_1^T = \text{Im}(\mathcal{O}^-)^T \text{ e } \mathbf{P}_2 \text{ rende non singolare la matrice } \mathbf{P}^{-1}.$$

Indicare inoltre la struttura a blocchi delle matrici $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ e $\bar{\mathbf{C}}$ che si ottengono:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & 0 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{C}} &= [\mathbf{C}_1 \quad 0] \end{aligned}$$

Scrivere la forma semplificata della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ del sistema \mathcal{S} in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}, \mathbf{B}_i$ e \mathbf{C}_j che caratterizzano il sistema $\bar{\mathcal{S}} = (\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}_1 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1} \mathbf{B}_1$$

15. a) Si scriva la forma esplicita della formula di Ackermann che fornisce il vettore \mathbf{k}^T che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori di un sistema retroazionato:

$$\mathbf{k}^T = - [0 \ \dots \ 0 \ 1] (\mathcal{R}^+)^{-1} p(\mathbf{A})$$

b) Indicare la forma del polinomio desiderato $p(\lambda)$ e della matrice $p(\mathbf{A})$ di un sistema tempo continuo nel caso $n = 4$ in cui si voglia avere un tempo di assestamento $T_a = 6$ s e si voglia posizionare tutti gli autovalori nello stesso punto reale λ :

$$\lambda = -\frac{3}{T_a} = -0.5, \quad p(\lambda) = (\lambda + 0.5)^4, \quad p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} + 0.5\mathbf{I})^4$$

16. Dato il sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, riportare la struttura di uno stimatore asintotico dello stato *di ordine ridotto*:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = (\bar{\mathbf{A}}_{11} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{v}}(t) + (\bar{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{22} - \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{L})\mathbf{y}(t) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2)\mathbf{u}(t)$$

17. Dato un sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$:

a) è possibile utilizzare un osservatore asintotico dello stato *in catena aperta* se e solo se:
il sistema è asintoticamente stabile

b) è possibile utilizzare un osservatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno* se e solo se:

la parte non osservabile del sistema è asintoticamente stabile

18. Indicare la struttura del sistema duale \mathcal{S}_D associato ad un sistema dato $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$:

$$\mathcal{S}_D = (\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$$

19. Scrivere la struttura della matrice di trasformazione \mathbf{P}_c^{-1} che porta un sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ osservabile in forma canonica di osservabilità ($\mathbf{x} = \mathbf{P}_c \mathbf{x}_c$):

$$\mathbf{P}_c^{-1} = (\mathcal{O}_c^-)^{-1} \mathcal{O}_c^- = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^2 \\ \dots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

dove gli α_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice \mathbf{A} .

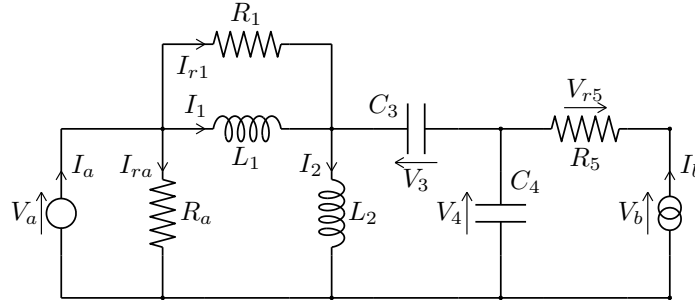
20. Si consideri un sistema non lineare tempo continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ e sia \mathbf{x}_0 un punto di equilibrio del sistema per ingresso costante \mathbf{u}_0 . Scrivere la parte lineare dello sviluppo in serie della funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ nell'intorno del punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

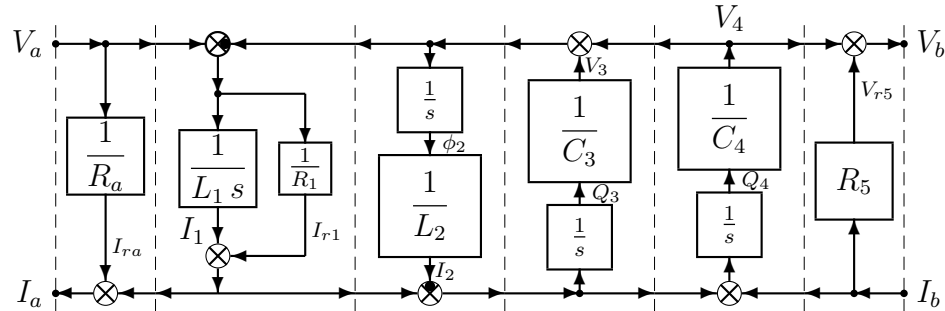
21. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e delle variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico *Meccanico Traslazionale*. Indicare inoltre la relazione costitutiva (non lineare e lineare) dei singoli elementi e l'equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

	Simboli	Rel. Costitutiva	Caso Lineare	Eq. Differenziale
\mathcal{D}_1	M Massa			
q_1	P quantità di moto	$P = \Phi_M(\dot{x})$	$P = M \dot{x}$	$\frac{dP}{dt} = F$
v_1	\dot{x} velocità			
\mathcal{D}_2	E Elasticità			
q_2	x spostamento	$x = \Phi_E(F)$	$x = E F$	$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$
v_2	F forza			
\mathcal{R}	b Dissipatore	$F = \Phi_b(\dot{x})$	$F = b \dot{x}$	

22. Si consideri il seguente circuito elettrico costituito dalle induttanze L_1 , L_2 , dalle capacità C_3 , C_4 e dalle resistenze R_a , R_1 e R_5 . Sul sistema agiscono due ingressi: la tensione V_a e la corrente I_b . Le uscite del sistema sono: la corrente I_a e la tensione V_b .



Il modello P.O.G. dello schema elettrico assegnato ha la seguente struttura:



Sia $\mathbf{x} = [I_1 \quad I_2 \quad V_3 \quad V_4]^T$ il vettore di stato, $\mathbf{u} = [V_a \quad I_b]^T$ il vettore degli ingressi e $\mathbf{y} = [I_a \quad V_b]^T$ il vettore delle uscite. Scrivere il corrispondente sistema dinamico $\bar{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}$ nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_5 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

23. Enunciare il criterio diretto di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi **tempo-discreti**.

Si consideri il sistema non lineare $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_0)$ e sia \mathbf{x}_0 un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante \mathbf{u}_0 .

1) Se in un intorno W del punto \mathbf{x}_0 esiste una funzione continua $V(\mathbf{x}) : W \rightarrow \mathcal{R}$ definita positiva e se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa, allora il punto \mathbf{x}_0 è stabile. Se la funzione $\Delta V(\mathbf{x})$ è definita negativa, allora il punto \mathbf{x}_0 è asintoticamente stabile.

24. Quali delle seguenti funzioni $V(x_1, x_2)$ sono definite positive nell'intorno del punto **(1, 1)**:

$V(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2;$
 $V(x_1, x_2) = (x_1^2 - 1)x_2^2 + (x_2^2 - 1)x_1^2;$
 $V(x_1, x_2) = (x_1^2 - 1) + (x_2^2 - 1);$
 $V(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2x_2^2 + (x_2 - 1)^2x_1^2;$

25. Sia dato il seguente sistema non-lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, **tempo-continuo**, privo di ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - \alpha)x_2 \end{cases}$$

a) Calcolare lo Jacobiano $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e la matrice \mathbf{A}_1 del sistema linearizzato nell'intorno del punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$:

Lo Jacobiano $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e la matrice \mathbf{A}_1 del sistema linearizzato nell'intorno di $\bar{\mathbf{x}}_1$ sono i seguenti:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 + 2x_1x_2 & x_1^2 - \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

b) Studiare, al variare di α , la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}_1$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Il polinomio caratteristico della matrice \mathbf{A}_1 è il seguente:

$$\Delta_{\mathbf{A}_1}(s) = s^2 + \alpha s + 1 = 0$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che il punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ del sistema non lineare: a) è asintoticamente stabile se $\alpha > 0$; b) è instabile se $\alpha < 0$; c) il criterio non implica nulla per $\alpha = 0$.

26. Sia dato il seguente sistema non-lineare $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, **tempo-discreto**, privo di ingressi:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= -x_2 \\ x_2(k+1) &= x_1 + (x_1^2 - \alpha)x_2 \end{cases}$$

a) Determinare, al variare di α , i 3 punti di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}_1$, $\bar{\mathbf{x}}_2$ e $\bar{\mathbf{x}}_3$ del sistema non lineare:

I punti di equilibrio si determinano imponendo $x_1(k+1) = x_1(k)$ e $x_2(k+1) = x_2(k)$:

$$x_1 = -x_2, \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_2 + (x_2^2 - \alpha)x_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_2^2 - \alpha - 2)x_2 = 0$$

Dall'ultima relazione si ha $x_2 = 0$, $x_2 = \sqrt{\alpha + 2}$ e $x_2 = -\sqrt{\alpha + 2}$ da cui si ottiene:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0), \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = (\sqrt{\alpha + 2}, -\sqrt{\alpha + 2}), \quad \bar{\mathbf{x}}_3 = (-\sqrt{\alpha + 2}, \sqrt{\alpha + 2}).$$

b) Studiare, al variare di α , la stabilità del sistema non lineare nell'intorno del punto $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0, 0)$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Lo Jacobiano $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, la matrice \mathbf{A}_1 e il polinomio caratteristico della matrice \mathbf{A}_1 coincidono con quelli determinati al punto precedente:

$$\Delta_{\mathbf{A}_1}(z) = z^2 + \alpha z + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che il punto di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}_1$: a) è instabile se $|\alpha| > 1$; b) il criterio non implica nulla per $|\alpha| < 1$. Infatti per $|\alpha| < 1$ le due soluzioni $z_{1,2}$ del polinomio caratteristico si trovano sul cerchio unitario, cioè hanno modulo unitario.

c) Data la seguente funzione di Lyapunov: $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ calcolare la funzione $\Delta V(\mathbf{x}(k))$:

La funzione $\Delta V(\mathbf{x}(k))$ si calcola nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}(k)) &= (-x_2)^2 + (x_1 + (x_1^2 - \alpha)x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 + (x_1^2 - \alpha)^2 x_2^2 + 2x_1x_2(x_1^2 - \alpha) - x_1^2 - x_2^2 \\ &= x_2^2(x_1^2 - \alpha)^2 + 2x_1x_2(x_1^2 - \alpha) = [x_2(x_1^2 - \alpha) + 2x_1]x_2(x_1^2 - \alpha) \end{aligned}$$