Nome:			
Nr. Mat.			
Firma:			
C.L.:	Info. ‖	Elet. ‖	Telec.

Teoria dei Sistemi e del Controllo
Compito A del 8 Gennaio 2015
Domande ed esercizi

1. Scrivere l'andamento temporale della funzione di uscita $\mathbf{y}(t)$, soluzione dell'equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ e dell'equazione statica $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0)$ all'istante t_0:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C}\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

2. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(k,h)$ di un sistema dinamico $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)$ discreto lineare tempo-variante:

$$\mathbf{\Phi}(k,h) = \begin{cases} \mathbf{A}(k-1)\ldots\mathbf{A}(h+1)\mathbf{A}(h) & \text{se } k > h \\ \mathbf{I} \text{ (Matrice identità)} & \text{se } k = h \end{cases}$$

3. Descrivere a parole che cosa rappresenta il simbolo $\mathcal{X}^-(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_1))$:

$\mathcal{X}^-(t_0, t_1, \mathbf{x}(t_1))$ è l'*insieme degli stati controllabili* all'evento $\{t_1, \mathbf{x}(t_1)\}$ dall'istante t_0.

4. Descrivere a parole che cosa rappresenta, per sistemi lineari discreti, il simbolo $\mathcal{E}^-(k)$:

$\mathcal{E}^-(k)$ *è l'insieme degli stati* non osservabili in k passi*, cioè degli stati compatibili con le successioni di ingresso e di uscita identicamente nulle,* $\mathbf{u}(\tau) = 0$ *e* $\mathbf{y}(\tau) = 0$ *per* $\tau \in [0,\ k-1]$.

Indicare inoltre, in modo esteso, il modo tipico di calcolare l'insieme $\mathcal{E}^-(k)$:

$$\mathcal{E}^-(k) = \ker \mathcal{O}^-(k) = \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix}$$

5. Applicando al sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$ si ottiene un sistema trasformato $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\,\tilde{\mathbf{x}}(t)$ caratterizzato dalle seguenti matrici $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ e $\tilde{\mathbf{C}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \qquad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \qquad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$$

Il sistema dato e il sistema trasformato godono delle seguenti proprietà:

⊗ hanno gli stessi autovalori;
⊗ $\mathcal{X}^+$ e $\tilde{\mathcal{X}}^+$ hanno la stessa dimensione;
○ hanno la stessa matrice di osservabilità;
⊗ hanno gli stessi ingressi;
○ hanno gli stessi autovettori;
⊗ hanno la stessa matrice di trasferimento;

6. Calcolare la matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$ e la matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema è: ⊗ raggiungibile? ○ non raggiungibile? ⊗ osservabile? ○ non osservabile?

7. Si applichi la $\mathcal{Z}$trasformata alla seguente funzione di *stato*:

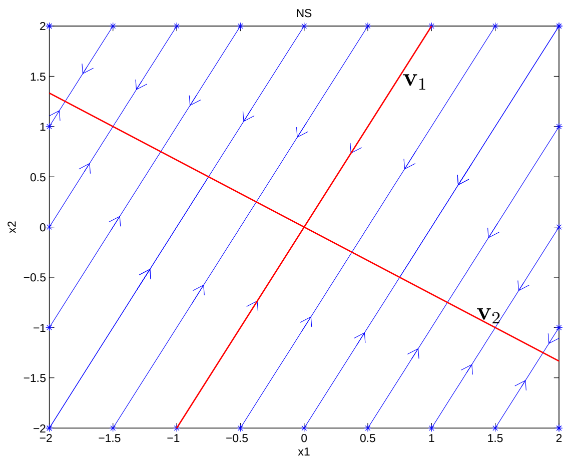
$$\mathcal{Z}\left[\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)\right]$$

e si fornisca l'espressione della trasformata $\mathbf{x}(z)$ del vettore di stato $\mathbf{x}(k)$ in funzione dello stato iniziale $\mathbf{x}_0$ e della trasformata $\mathbf{u}(z)$ del segnale di ingresso $u(k)$:

$$\mathbf{x}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\, \mathbf{x}_0 + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\, \mathbf{u}(z)$$

8. Disegnare qualitativamente le traiettorie di un sistema dinamico del secondo ordine $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ caratterizzato dagli autovalori λ_i e dagli autovettori $\mathbf{v}_i$ riportati nei due riquadri.

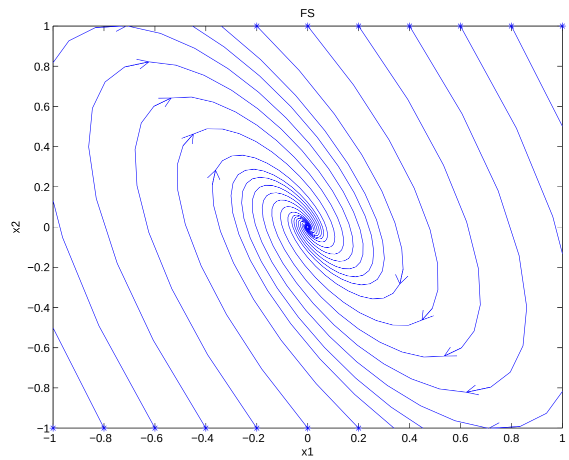
1) Autovalori: $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 0$. I corrispondenti autovettori reali $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono mostrati in figura.



◯ Nodo? ◯ Fuoco? ◯ Sella?

⊗ Stabile? ◯ Instabile?

2) Autovalori: $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2j$. Autovettori: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 j$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^*$. I vettori reali $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono mostrati in figura.



◯ Nodo? ⊗ Fuoco? ◯ Sella?

⊗ Stabile? ◯ Instabile?

9. Sia dato un sistema autonomo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ del quarto ordine dove la matrice $\mathbf{A}$ è caratterizzata dai seguenti autovalori λ_i, autovettori $\mathbf{v}_i$ e autovettori generalizzati $\mathbf{v}_i^*$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5.\bar{6} & 8 & 6.\bar{6} & -1.\bar{3} \\ -3 & -3 & -2 & 0 \\ -0.\bar{3} & -2 & -2.\bar{3} & 0.\bar{6} \\ 5.\bar{6} & 6 & 6.\bar{6} & -0.\bar{3} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1+2j \\ \lambda_2 = 1-2j \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = -1 \end{array} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2j \\ -1-j \\ 1 \\ 2+j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2j \\ -1+j \\ 1 \\ 2-j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

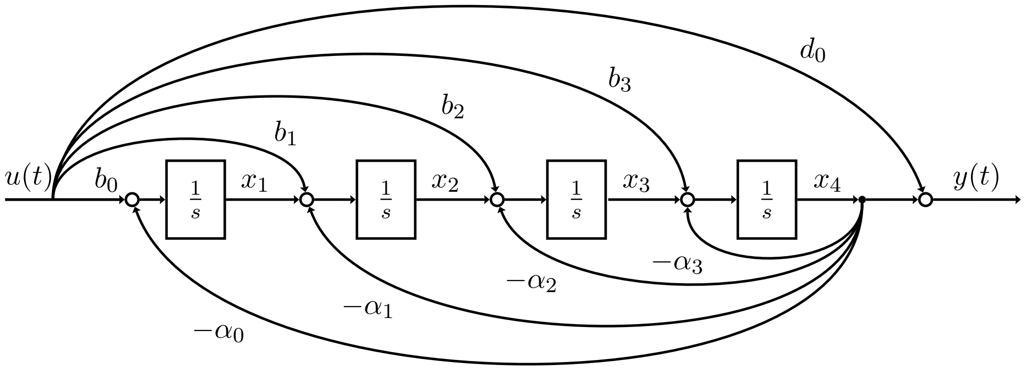
a) Scrivere una matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ (con $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$) che sia in grado di portare la matrice $\mathbf{A}$ in forma diagonale di Jordan $\mathbf{A}_J$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2j & -2j & 0 & 1 \\ -1-j & -1+j & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2+j & 2-j & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_J = \begin{bmatrix} 1+2j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Scrivere una matrice di trasformazione $\mathbf{T}_R$ (con $\mathbf{x} = \mathbf{T}_R\bar{\mathbf{x}}$) che sia in grado si portare la matrice $\mathbf{A}$ in forma "reale" di Jordan $\mathbf{A}_R$:

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

10. Sia dato il seguente schema a blocchi:



Posto $\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, scrivere la struttura delle matrici $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ di un sistema tempo-continuo, nello spazio degli stati, che descriva la dinamica dello schema.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) + d_0\, u(t) \end{cases}$$

Si calcoli inoltre la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3\, s^3 + b_2\, s^2 + b_1\, s + b_0}{s^4 + \alpha_3\, s^3 + \alpha_2\, s^2 + \alpha_1\, s + \alpha_0} + d_0$$

11. Sia data la seguente equazione differenziale non lineare:

$$\dddot{y}(t)\, y(t) + 2\, \sin[\ddot{y}(t)] + 3\, \dot{y}^2(t)\, y(t) = u(t).$$

Scelto $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^{\mathrm{T}} = [y(t) \quad \dot{y}(t) \quad \ddot{y}(t)]^{\mathrm{T}}$ come vettore di stato, esprimere l'equazione differenziale non lineare nello spazio degli stati:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{u(t) - 2\, \sin x_3}{x_1} - 3\, x_2^2 \end{cases}$$

12. Si consideri il problema di controllo punto a punto per un sistema lineare tempo-discreto. Tra le infinite soluzioni $\mathbf{u}$ che fanno passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(k)$ nell'intervallo di tempo $[0,\ k]$ indicare la soluzione $\mathbf{u}$ che minimizza la norma euclidea:

$$\mathbf{u} = (\mathcal{R}_k^+)^T [\mathcal{R}_k^+ (\mathcal{R}_k^+)^T]^{-1} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0)]$$

13. Data la funzione di trasferimento $G(z)$, scrivere la struttura del corrispondente sistema dinamico in forma canonica di raggiungibilità indicando con $u(k)$ l'ingresso e con $y(k)$ l'uscita:

$$G(z) = \frac{2z^3 + 6z^2 + 1}{z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 2z + 4} + 2$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -5 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} u(k) \end{cases}$$

14. Calcolare la seguente funzione matriciale:

$$e^{\left[\begin{array}{cc}\sigma & -\omega \\ \omega & \sigma\end{array}\right]t} = \left[\begin{array}{cc} e^{\sigma t}\cos(\omega t) & -e^{\sigma t}\sin(\omega t) \\ e^{\sigma t}\sin(\omega t) & e^{\sigma t}\cos(\omega t)\end{array}\right]$$

15. Si scriva la forma esplicita della formula di Ackermann che fornisce il vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ che permette il posizionamento arbitrario degli autovalori di un sistema retroazionato:

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = -\left[\begin{array}{ccccc} 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right] (\mathcal{R}^{+})^{-1} p(\mathbf{A})$$

16. Scrivere come si determina la matrice $\mathbf{P}^{-1}$ della trasformazione $\mathbf{x} = \mathbf{P}\overline{\mathbf{x}}$ che potra un sistema non completamente osservabile in forma standard di osservabilità:

$$\mathbf{P}^{-1} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2\end{array}\right] \qquad \text{dove} \qquad \mathrm{Im}\mathbf{P}_1^{\mathrm{T}} = \mathrm{Im}(\mathcal{O}^{-})^{\mathrm{T}} \text{ e } \mathbf{P}_2 \text{ rende non singolare la matrice } \mathbf{P}^{-1}.$$

Indicare inoltre la struttura a blocchi delle matrici $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ che si ottengono:

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cc}\mathbf{A}_{1,1} & 0 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2}\end{array}\right] \qquad \overline{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2\end{array}\right]$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \left[\begin{array}{cc}\mathbf{C}_1 & 0\end{array}\right]$$

Scrivere la forma semplificata della matrice di trasferimento $\mathbf{H}(s)$ del sistema $\mathcal{S}$ in funzione delle sottomatrici $\mathbf{A}_{i,j}$, $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{C}_j$ che caratterizzano il sistema $\bar{\mathcal{S}} = (\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}})$:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}_1(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{B}_1$$

17. Dato il sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, riportare la struttura di:

a) uno stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t)$$

b) uno stimatore asintotico dello stato *di ordine ridotto*:

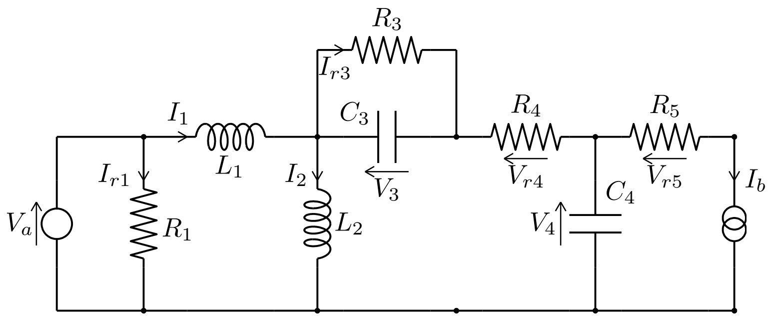
$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\left[\begin{array}{c}\hat{\mathbf{v}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t)\end{array}\right]$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}(t) = (\overline{\mathbf{A}}_{11} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21})\hat{\mathbf{v}}(t) + (\overline{\mathbf{A}}_{12} + \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{22} - \overline{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{L} - \mathbf{L}\overline{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{L})\mathbf{y}(t) + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{B}_2)\mathbf{u}(t)$$

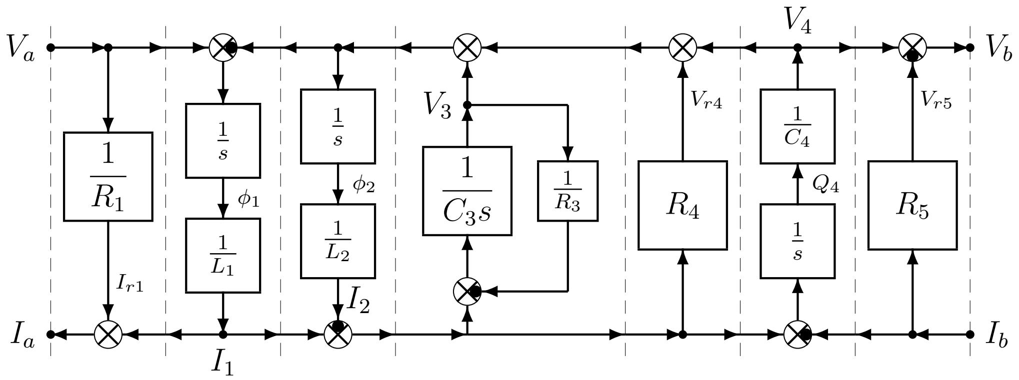
18. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e delle variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico *Idraulico*. Indicare inoltre la relazione costitutiva dei singoli elementi (sia nel caso generale non lineare che nel caso lineare) e l'equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

	Simboli		Rel. Costititutiva	Caso Lineare	Eq. Differenzile
$\mathcal{D}_1$	C_I	Capacità idrau.	$V = \Phi_C(P)$	$V = C_I\,P$	$\dfrac{dV}{dt} = Q$
q_1	V	volume			
v_1	P	pressione			
$\mathcal{D}_2$	L_I	Induttanza idrau.	$\phi_I = \Phi_L(Q)$	$\phi_I = L_I\,Q$	$\dfrac{d\,\phi_I}{dt} = P$
q_2	ϕ_I	flusso idrau.			
v_2	Q	portata volumetrica			
$\mathcal{R}$	R	Resistenza idrau.	$P = \Phi_R(Q)$	$P = R_I\,Q$	

19. Si consideri il seguente circuito elettrico costituito dalle induttanze L_1, L_2, dalle capacità C_3, C_4 e dalle resistenze R_1, R_3 , R_4 e R_5. Sul sistema agiscono due ingressi: la tensione V_a e la corrente I_b. Le uscite del sistema sono: la corrente I_a e la tensione V_b.



Il modello P.O.G. del circuito elettrico assegnato ha la seguente struttura:



Sia $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & V_3 & V_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore di stato, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} V_a & I_b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore degli ingressi e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} I_a & V_b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore delle uscite. Scrivere il corrispondente sistema dinamico $\overline{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}$ nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_4 & R_4 & -1 & -1 \\ R_4 & -R_4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{C}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -R_5 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

20. Enunciare il criterio diretto di <u>instabilità</u> di Lyapunov nel caso di sistemi tempo continui.
Si consideri il sistema non lineare $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_0)$ *e sia* $\mathbf{x}_0$ *un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante* $\mathbf{u}_0$. *Se:*

1) in un intorno W di $\mathbf{x}_0$ <u>esiste</u> una funzione $V(\mathbf{x}) : W \to \mathcal{R}$ continua con derivate prime continue e nulla in $\mathbf{x}_0$;
2) il punto $\mathbf{x}_0$ è punto di accumulazione per l'insieme dei punti $\mathbf{x} \in W$ in cui è $V(\mathbf{x}) > 0$;
3) $\dot{V}(\mathbf{x})$ è *definita positiva* in W;

allora $\mathbf{x}_0$ è un punto di equilibrio <u>*instabile*</u>.

21. Sia dato il seguente sistema non–lineare $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$, tempo–discreto, privo di ingressi:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= \alpha x_1^2(k) - x_1^3(k) + x_2(k) \end{cases}$$

a) Determinare la posizione dei 2 punti di equilibrio $\overline{\mathbf{x}}_1$ e $\overline{\mathbf{x}}_2$del sistema:

I punti di equilibrio del sistema si determinano imponendo $x_1(k+1) = x_1(k)$ e $x_2(k+1) = x_2(k)$:

$$x_1 = x_2, \qquad x_2 = \alpha x_1^2 - x_1^3 + x_2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (\alpha - x_1)x_1^2.$$

Il sistema ammette i seguenti 2 punti di equilibrio:

$$\overline{\mathbf{x}}_1 = (0,\ 0), \qquad \overline{\mathbf{x}}_2 = (\alpha,\ \alpha).$$

b) Calcolare lo Jacobiano $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ del sistema non lineare $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$:

Lo Jacobiano del sistema non lineare è:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha x_1 - 3x_1^2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Calcolare le matrici $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ del sistema linearizzato nell'intorno dei 2 punti di equilibrio $\overline{\mathbf{x}}_1$ e $\overline{\mathbf{x}}_2$:

Le matrici $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ del sistema linearizzato hanno la seguente struttura:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 1 \end{bmatrix},$$

d) Studiare, al variare del parametro α, la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dei 2 punti di equilibrio $\overline{\mathbf{x}}_1$ e $\overline{\mathbf{x}}_2$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_1$ è il seguente:

$$\Delta_{\mathbf{A}_1}(z) = z(z-1) = 0 \qquad \rightarrow \qquad z_1 = 0, \quad z_2 = 1.$$

Il secondo autovalore $z_2 = 1$ del sistema linearizzato si trova sul cerchio unitario e quindi in questo caso il criterio ridotto di Lyapunov non è conclusivo, cioè non implica nulla.

Il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}_2$ è il seguente:

$$\Delta_{\mathbf{A}_2}(z) = z^2 - z + \alpha^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad z_{1,2} = 0.5 \pm \sqrt{0.25 - \alpha^2}.$$

Il criterio ridotto di Lyapunov non implica nulla per $|z_{1,2}| = 1$, cioè per:

$$\alpha = 0 \qquad \alpha^2 = 1.$$

In base al criterio ridotto di Lyapunov si può affermare che il punto di equilibrio $\mathbf{x}_2 = (\alpha, \alpha)$ è asintoticamente stabile per il sistema non-lineare discreto assegnato per $|z_{1,2}| < 1$, cioè per $|\alpha| < 1$. Il punto $\mathbf{x}_2$ è instabile per $|z_{1,2}| > 1$, cioè per $|\alpha| > 1$.

e) Sia data la funzione $V(\mathbf{x}(k)) = x_1^2 + x_2^2$. Per $\alpha = 0$, calcolare la funzione $\Delta V(\mathbf{x}(k))$ che si utilizza nel criterio diretto di Lyapunov. Non è necessario discutere il risultato finale ottenuto.

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = (x_2)^2 + (x_2 - x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2 = (x_2 - x_1^3)^2 - x_1^2$$