**Teoria dei Sistemi e del Controllo**
**Compito A del 6 Dicembre 2011**
**Domande ed esercizi**

| Nome: | | | |
|---|---|---|---|
| Nr. Mat. | | | |
| Firma: | | | |
| C.L.: | Info. ‖ | Elet. ‖ | Telec. |

1. Scrivere la forma esplicita della *matrice di transizione dello stato* $\mathbf{\Phi}(k,h)$ nel caso di sistemi dinamici lineari discreti tempo-invarianti:

$$\mathbf{\Phi}(k,h) =$$

2. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale matriciale $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ all'istante $t_0 = 0$:

$$\mathbf{x}(t) =$$

3. Scrivere la soluzione esplicita dell'equazione alle differenze $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ essendo $\mathbf{x}(h)$ lo stato all'istante iniziale $h$.

$$\mathbf{x}(k) =$$

4. Calcolare la matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}^+$ e la matrice di osservabilità $\mathcal{O}^-$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \mathcal{R}^+ = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix},$$

Il sistema è: ◯ raggiungibile? ◯ non raggiungibile? ◯ osservabile? ◯ non osservabile?

Fornire una base $\mathcal{B}_R$ del sottospazio raggiungibile $\mathcal{X}^+$ e una base $\mathcal{B}_O$ del sottospazio non osservabile $\mathcal{E}^-$:

$$\mathcal{X}^+ = \mathrm{Im}\,[\mathcal{B}_R] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{E}^- = \mathrm{Im}\,[\mathcal{B}_O] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}.$$

5. La seguente rappresentazione simbolica:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

viene utilizzata per descrivere un sistema con le seguenti caratteristiche:

◯ un sistema statico;
◯ un sistema lineare;
◯ un sistema tempo variante;
◯ un sistema tempo-continuo;
◯ un sistema a costanti concentrate;
◯ un sistema privo di ingressi;

6. Applicando al sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}$ si ottiene un sistema trasformato $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\,\tilde{\mathbf{x}}(t)$ caratterizzato dalle seguenti matrici $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ e $\tilde{\mathbf{C}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \qquad\qquad \tilde{\mathbf{B}} = \qquad\qquad \tilde{\mathbf{C}} =$$

7. Si applichi la trasformata di Laplace alla seguente funzione di *stato*:

$$\mathcal{L}\left[\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\right]$$

e si fornisca l'espressione della trasformata $\mathbf{x}(s)$ del vettore di stato $\mathbf{x}(t)$ in funzione dello stato iniziale $\mathbf{x}_0$ e della trasformata $\mathbf{u}(s)$ del segnale di ingresso $u(t)$:

$$\mathbf{x}(s) =$$

8. Sia dato un sistema autonomo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ del quarto ordine dove la matrice $\mathbf{A}$ è caratterizzata dai seguenti autovalori $\lambda_i$, e autovettori $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & -5 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -2+j \\ \lambda_4 = -2-j \end{array} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ j \\ -1+j \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -j \\ -1-j \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Scrivere una matrice di trasformazione $\mathbf{T}$ (con $\mathbf{x} = \mathbf{T}\overline{\mathbf{x}}$) che sia in grado si portare la matrice $\mathbf{A}$ in forma diagonale di Jordan $\mathbf{A}_J$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_J = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

b) Scrivere una matrice di trasformazione $\mathbf{T}_R$ (con $\mathbf{x} = \mathbf{T}_R\overline{\mathbf{x}}$) che sia in grado si portare la matrice $\mathbf{A}$ in forma "reale" di Jordan $\mathbf{A}_R$:

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

c) Disegnare qualitativamente le traiettorie del sistema dinamico:

| 1) nel sottospazio $\mathcal{X}_{1,2}$ generato dai due autovettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. | 2) nel sottospazio $\mathcal{X}_{3,4}$ generato dai due vettori $\mathrm{Re}[\mathbf{v}_3]$ e $\mathrm{Im}[\mathbf{v}_3]$. |
|---|---|
| ○ Nodo? ○ Fuoco? ○ Sella? | ○ Nodo? ○ Fuoco? ○ Sella? |
| ○ Stabile? ○ Instabile? | ○ Stabile? ○ Instabile? |

9. Disegnare lo schema a blocchi associato al seguente sistema tempo-continuo dove $\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}_o(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_o(t) \; + \; d_0\, u(t) \end{array} \right.$$

$$\boxed{\frac{1}{s}} \qquad \boxed{\frac{1}{s}} \qquad \boxed{\frac{1}{s}} \qquad \boxed{\frac{1}{s}}$$

10. Sia data la seguente equazione differenziale non lineare:

$$\dddot{y}(t) + 3\, \sin \ddot{y}(t) + 2\, \sqrt{\dot{y}(t)} + 5\, [y(t)]^3 = u(t).$$

Scelto $\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]^{\mathrm{T}} = [y(t) \;\; \dot{y}(t) \;\; \ddot{y}(t)]^{\mathrm{T}}$ come vettore di stato, esprimere l'equazione differenziale non lineare nello spazio degli stati:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 \;= \\ \dot{x}_2 \;= \\ \dot{x}_3 \;= \end{array} \right.$$

11. Si consideri il problema di controllo punto a punto per un sistema lineare tempo-discreto. Tra le infinite soluzioni $\mathbf{u}$ che permettono far passare il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ allo stato finale $\mathbf{x}(k)$ nell'intervallo di tempo $[0,\; k]$ indicare la struttura della soluzione $\mathbf{u}$ che minimizza la norma eucludea $||\mathbf{u}||$:

$$\mathbf{u} =$$

12. Sia dato il seguente sistema lineare tempo-continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. Preso $T$ come periodo di campionamento, scrivere l'espressione della matrice $\mathbf{F}$ che caratterizza il corrispondente sistema a segnali campionati $\mathbf{x}(k{+}1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \qquad\qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

13. Data la funzione di trasferimento $G(z)$, scrivere la struttura del corrispondente sistema dinamico in forma canonica di raggiungibilità indicando con $u(k)$ l'ingresso e con $y(k)$ l'uscita:

$$G(z) = \frac{2z^3 + 4z^2 + 5z}{z^4 + 6z^3 + 3z^2 + 2z + 4} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{x}(k+1) & = & \left[ \begin{array}{c} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{array} \right] \mathbf{x}(k) + \left[ \begin{array}{c} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{array} \right] u(k) \\ y(k) & = & [ \quad ]\, \mathbf{x}(k) + [ \quad ]\, u(t) \end{array} \right.$$

14. Dato il sistema lineare tempo-discreto $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$, riportare la struttura di:
a) uno stimatore asintotico dello stato *in catena chiusa di ordine pieno*:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) =$$

b) l'evoluzione temporale dell'errore di stima $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ che si ha a partire da un errore di stima iniziale $\mathbf{e}(0)$:

$$\mathbf{e}(k) =$$

15. Sia dato un sistema lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{u}$, invariante, completamente raggiungibile e con un solo ingresso. Sia $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$ e sia $p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$ un polinomio monico scelto a piacere. Si fornisca l'espressione del vettore $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ che mediante la retroazione statica $\mathbf{u} = \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ è in grado di far coincidere gli autovalori della matrice $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}^{\mathrm{T}}$ con le radici del polinomio $p(\lambda)$:

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} =$$

dove $\mathbf{k}_c^{\mathrm{T}} = [ \qquad ]$.

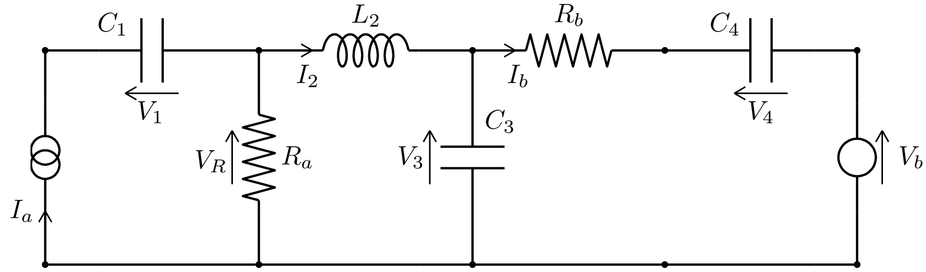
16. Scrivere le matrici a blocchi $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{B}}$ e $\overline{\mathbf{C}}$ di un sistema in forma standard di raggiungibilità:

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[ \begin{array}{cc} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{array} \right], \qquad \overline{\mathbf{B}} = \left[ \begin{array}{c} \quad \\ \quad \end{array} \right], \qquad \overline{\mathbf{C}} = [ \qquad ]$$

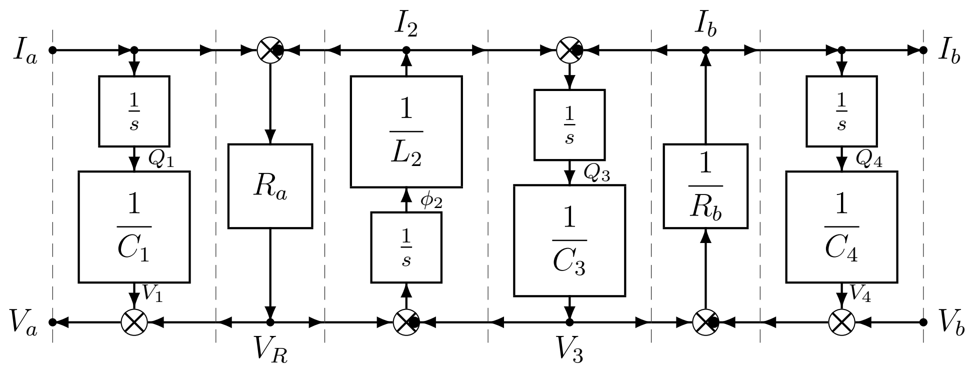
17. Scrivere all'interno della seguente tabella i simboli e i nomi delle variabili energia e delle variabili di potenza che caratterizzano l'ambito energetico *Meccanico Traslazionale*. Indicare inoltre la relazione costitutiva dei singoli elementi (sia nel caso generale non lineare che nel caso lineare) e l'equazione differenziale che caratterizza gli elementi dinamici:

| | Simboli / Nomi | Rel. Costititutiva | R. C. Caso Lineare | Eq. Differenzile |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{D}_1$ | | | | |
| $q_1$ | | | | |
| $v_1$ | | | | |
| $\mathcal{D}_2$ | | | | |
| $q_2$ | | | | |
| $v_2$ | | | | |
| $\mathcal{R}$ | | | | |

18. Si consideri il seguente circuito elettrico costituito dalle capacità $C_1$, $C_3$, $C_4$, dall'induttanza $L_2$ e dalle resistenze $R_a$ e $R_b$. Sul sistema agiscono due ingressi: la corrente $I_a$ e la tensione $V_b$. Le uscite del sistema sono: la tensione $V_a$ e la corrente $I_b$.




Il modello P.O.G. del circuito elettrico assegnato è il seguente:




Sia $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V_1 & I_2 & V_3 & V_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore di stato, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} I_a & V_b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore degli ingressi e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} V_a & I_b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ il vettore delle uscite. Scrivere il corrispondente sistema dinamico $\overline{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{x} + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}$ nello spazio degli stati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ \\ \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{C}}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} \\ \\ \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{D}}} \underbrace{\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

19. Enunciare il criterio diretto di stabilità di Lyapunov nel caso di sistemi tempo discreti.

*Si consideri il sistema non lineare* $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}_0)$ *e sia* $\mathbf{x}_0$ *un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante* $\mathbf{u}_0$.

*1) Se ...*

20. Sia dato il seguente sistema non–lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, tempo–continuo, privo di ingressi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1\,(x_1^2 - 1) - \alpha x_2 \end{cases}$$

a) Determinare la posizione dei 3 punti di equilibrio $\overline{\mathbf{x}}_1$, $\overline{\mathbf{x}}_2$ e $\overline{\mathbf{x}}_3$ del sistema:

$$\overline{\mathbf{x}}_1 = (\quad,\quad), \qquad \overline{\mathbf{x}}_2 = (\quad,\quad), \qquad \overline{\mathbf{x}}_3 = (\quad,\quad).$$

b) Calcolare lo Jacobiano $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ del sistema non lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

c) Calcolare le matrici $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$ del sistema linearizzato nell'intorno dei 3 punti di equilibrio $\overline{\mathbf{x}}_1$, $\overline{\mathbf{x}}_2$ e $\overline{\mathbf{x}}_3$:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_3) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

d) Studiare, al variare del parametro $\alpha$, la stabilità del sistema non lineare nell'intorno dei 3 punti di equilibrio $\overline{\mathbf{x}}_1$, $\overline{\mathbf{x}}_2$ e $\overline{\mathbf{x}}_3$ utilizzando il criterio ridotto di Lyapunov:

e) Nel caso $\alpha = 0$, studiare la stabilità del sistema non lineare nell'intorno punto di equilibrio $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$ utilizzando il criterio "diretto" di Lyapunov e la seguente funzione di Lyapunov: $V(\mathbf{x}) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2$.